Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. 20 de Junio de 2007.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. LAS DOS ÚLTIMAS PÁGINAS SE UTILIZARÁN PARA PAPEL EN SUCIO. LAS DOS ÚLTIMAS PÁGINAS NO SE CORREGIRÁN. NO DESGRAPAR LAS HOJAS DEL EXAMEN.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 1 \\ 3x+y+2z &= b \\ x+y+az &= 2b \end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son un parámetros.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a y b.
(b) Resolver el sistema anterior para los valores $a = 1$ y $b = 1/7$.

---

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Halla el polinomio característico y los valores propios (o autovalores).
(b) Halla una base de vectores propios (o autovectores) de la matriz A.
(c) Calcula A^{10}. (Para facilitar los cálculos, utilizar que $2^{10} = 1024$.)

---

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x - y, 3x - 2y + z, y + z)$$

(a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
(b) Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen y unas ecuaciones que definen estos subespacios.
(c) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

---

(4) Dado el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x - 2y \geq -6, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0\}$$

(a) Dibuja el conjunto A, calculando los puntos de corte con los ejes. Dibuja su frontera y su interior y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

(b) Demuestra que la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x+4)^2 + (y-2)^2}$$

tiene máximo y mínimo sobre A.

(c) Dibuja las curvas de nivel de la función $g(x,y) = y + x^2$ y utilízalas para determinar dónde están los máximos y mínimos de g en A.

---

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$. Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es continua la función f.

(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

(c) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es diferenciable la función f?

---

(6) Considera la función

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$$

(a) Obtener los puntos críticos de f.

(b) Clasificar los puntos críticos de f obtenidos en el apartado anterior.

(c) Determinar el mayor subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava.

(d) Calcular los extremos globales de f en A.

---

(7) Considerar la función

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - x - z + 4z^2$$

y el conjunto

$$A = \{(x,y,z) : x + y = z\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar los extremos de f en A, especificando si son máximos o mínimos locales.
