Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. 18 de Junio de 2005.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + ay + az &= b \\ x + ay + az &= 3 \end{aligned}$$

donde a y b son parámetros.

(a) Determina, según los valores de los parámetros a y b, si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de los parámetros a y b en que es compatible indeterminado.

---

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el polinomio característico y los valores propios.

(b) Para $a = -1$, comprobar que la matriz A es diagonalizable y hallar la matriz de paso (también llamada matriz cambio de base).

(c) Estudiar para qué valores $a \neq -1$, la matriz A es diagonalizable.

---

(3) Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 - 2axy + y^2 + z^2 - 2axz$,

(a) Determinar para qué valores del parámetro a la forma cuadrática Q es definida positiva.

(b) Determinar para qué valores del parámetro a la forma cuadrática Q es indefinida.

---

(4) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior. ¿Es A cerrado, abierto, convexo, acotado o compacto?

(b) Enunciar el Teorema de Weierstrass. ¿Se puede aplicar este teorema a la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{Si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{Si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

en el conjunto A?

(c) Determinar si la función $f(x, y)$ del apartado anterior alcanza máximo o mínimo en el conjunto A. Sugerencia: $-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$.

---

(5) Considerar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Escribe las definiciones de:

(i) la función f es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) las derivadas parciales de la función f en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

y comenta qué relación hay entre las dos definiciones anteriores.

(b) Sea

$$f(x, y) = xye^{\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{y}\right)}$$

Calcular, si es posible, las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.

---

(6) Dada la función $f(x, y) = \log\left(2x^2 + y^2 + 1\right)$,

(a) Calcula el polinomio de Taylor de orden dos de f en torno al punto $(0, 0)$.

(b) Utilizando el apartado anterior, calcula razonadamente una aproximación del valor de $f(0'1, -0'2)$.

(c) Considerar la función anterior $f : A \to \mathbb{R}$ definida sobre el conjunto $A = [0,1] \times [0,1]$. Hallar de forma justificada, en caso de que existan, el máximo y el mínimo de f en A.

---

(7) Dada la función $f(x, y) = x^4 - 6x^2 + y^2$

(a) Obtén los puntos críticos de f y clasifícalos.

(b) Determina los conjuntos abiertos donde f es estrictamente cóncava y/o convexa.

(c) Determina razonadamente si f alcanza máximo y/o mínimo globales (o absolutos) en el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x < 3\}$, indicando en caso afirmativo en qué punto o puntos lo hace.

---

(8) Considerar la función $f(x, y) = 2 + (x - y)^2$ y el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y clasificar los extremos de f en A.
