

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa 0'5 puntos.

|                    |                |
|--------------------|----------------|
| <b>Apellidos:</b>  | <b>Nombre:</b> |
| <b>DNI:</b>        | <b>Grupo:</b>  |
| <b>Titulación:</b> |                |

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ax + ay + az &= b \\x + ay + az &= 3\end{aligned}$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros.

- Determina, según los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ , si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
- Resolver el sistema anterior para los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  en que es compatible indeterminado.

(a) La matriz asociada al sistema es

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & b \\ 1 & a & a & 3 \end{array} \right)$$

Realizando operaciones elementales por filas obtenemos

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & a-1 & a-1 & 2 \end{array} \right)$$

Observando la segunda fila, vemos que el sistema es incompatible a menos que  $a = b$ .

Estudiamos ahora el caso  $a = b$ . La segunda fila de la matriz es cero y la ignoramos. El sistema equivalente tiene como matriz adjunta la siguiente

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 2 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz ampliada es 2, independientemente del valor del parámetro  $a$ . Mientras que el rango de la matriz de coeficientes es 2 si  $a \neq 1$  y es 1 cuando  $a = 1$ . Utilizando el teorema de Rouché-Frobenius, concluimos que

$$\begin{cases} a \neq b & \text{el sistema es incompatible,} \\ a = b = 1 & \text{el sistema es incompatible} \\ a = b \neq 1 & \text{el sistema es compatible indeterminado, con un parámetro.} \end{cases}$$

(b) En el apartado anterior hemos probado que el sistema es compatible cuando  $a = b \neq 1$ . Además, en este caso y operando con las ecuaciones obtenemos que el sistema propuesto es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 2 \end{array} \right)$$

Tomando  $z$  como parámetro, de la segunda ecuación obtenemos que

$$y = \frac{2}{a-1} - z$$

y sustituyendo en la primera ecuación

$$x = 1 - y - z = \frac{a-3}{a-1}$$

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular el polinomio característico y los valores propios.
  - (b) Para  $a = -1$ , comprobar que la matriz  $A$  es diagonalizable y hallar la matriz de paso (también llamada matriz cambio de base).
  - (c) Estudiar para qué valores  $a \neq -1$ , la matriz  $A$  es diagonalizable.
- 

(a) Desarrollando por la tercera fila obtenemos que el polinomio característico es  $(a - \lambda)((\lambda - 1)^2 - 4)$ . Por tanto, los valores propios son

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1$$

(b) Para  $a = -1$  los valores propios son  $\lambda_1 = -1$  con multiplicidad 2 y  $\lambda_2 = 3$  con multiplicidad 1. Calculamos el espacio  $S(-1)$ . Es la solución del sistema

$$2x + 2y - 2z = 0$$

$$2x + 2y - 2z = 0$$

cuya solución es  $z = x + y$ . Por tanto,

$$S(-1) = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$$

y como  $\dim(S(-1)) = 2$ , la matriz es diagonalizable.

Calculamos ahora  $S(3)$ . Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema

$$-2x + 2y - 2z = 0$$

$$2x - 2y - 2z = 0$$

$$-4z = 0$$

cuya solución es

$$z = 0, \quad x = y$$

Por tanto,  $S(3) = \langle (1, 1, 0) \rangle$ . La forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Los valores propios son  $\lambda_1 = a$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = -1$ . Vemos que si  $a \neq -1$  y  $a \neq 3$ , entonces todos los valores propios son distintos y la matriz es diagonalizable.

Sólo falta estudiar el caso en que  $a = 3$ . En este caso los valores propios son  $\lambda_1 = 3$  con multiplicidad 2 y  $\lambda_2 = -1$  con multiplicidad 1. Vamos a calcular el espacio  $S(3)$ . Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema

$$-2x + 2y - 2z = 0$$

$$2x - 2y - 2z = 0$$

cuya solución es

$$z = 0, \quad x = y$$

Por tanto,  $S(3) = \langle (1, 1, 0) \rangle$ . Como  $\dim(S(3)) = 1$  no coincide con la multiplicidad de  $\lambda_1 = 3$ , la matriz no es diagonalizable en este caso.

- (3) Dada la forma cuadrática  $Q(x, y, z) = x^2 - 2axy + y^2 + z^2 - 2axz$ ,  
(a) Determinar para qué valores del parámetro  $a$  la forma cuadrática  $Q$  es definida positiva.  
(b) Determinar para qué valores del parámetro  $a$  la forma cuadrática  $Q$  es indefinida.
- 

La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ -a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los menores

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = 1 - a^2$$

$$D_3 = 1 - 2a^2$$

(a) la forma cuadrática es definida positiva si y sólo si

$$D_2 = 1 - a^2 > 0$$

$$D_3 = 1 - 2a^2 > 0$$

es decir, si y sólo si  $a^2 < 1/2$ , es decir,

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) Como  $D_1 > 0$ , vemos que la forma cuadrática es indefinida si

$$a < \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad a > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ya que, en ambos casos,  $D_3 < 0$ ).

Observamos que si

$$a = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

entonces  $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 = 0$ , por lo que es semidefinida positiva.

(4) Sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$ .

(a) Dibujar el conjunto  $A$ , su frontera y su interior. ¿Es  $A$  cerrado, abierto, convexo, acotado o compacto?

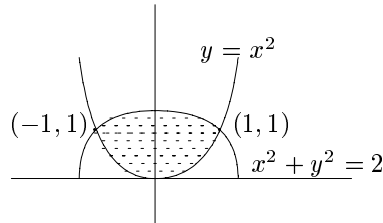
(b) Enunciar el Teorema de Weierstrass. ¿Se puede aplicar este teorema a la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{Si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{Si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

en el conjunto  $A$ ?

(c) Determinar si la función  $f(x, y)$  del apartado anterior alcanza máximo o mínimo en el conjunto  $A$ .  
Sugerencia:  $-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$ .

(a) El conjunto  $A$



Por tanto la frontera  $(\partial A)$  de  $A$  es



y el interior de  $A$  es  $A \setminus \partial A$ . Vemos que  $A$  es cerrado (porque  $\partial A \subset A$ ), no es abierto (porque  $\partial A \cap A \neq \emptyset$ ), es compacto (porque es cerrado y acotado) y es convexo.

(b) Teorema de Weierstrass: Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en un subconjunto compacto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $f$  alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el conjunto  $A$ .

Tomando rectas de la forma  $y = mx$ , vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m}{1 + m^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Y como este límite depende de  $m$ , la función no es continua en  $(0, 0) \in A$ . Por tanto, no se puede aplicar el Teorema de Weierstrass.

(c)

De la sugerencia se sigue que para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se verifica

$$-1 \leq f(x, y) \leq 1$$

Además, en el apartado (b) hemos visto que

$$f(x, mx) = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

es decir la función es constante a lo largo de la recta  $y = mx$ . Además  $f(0, y) = 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Como para  $x \neq 0$  se comprueba fácilmente que

$$f(x, x) = 1, \quad f(x, -x) = -1$$

vemos que todos los puntos de la recta  $y = -x$  son mínimos absolutos de  $f$  y todos los puntos de la recta  $y = x$  son máximos absolutos de  $f$  en el conjunto  $A$ .

(5) Considerar una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Escribe las definiciones de:

(i) la función  $f$  es diferenciable en el punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

(ii) las derivadas parciales de la función  $f$  en el punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

y comenta qué relación hay entre las dos definiciones anteriores.

(b) Sea

$$f(x, y) = xy e^{(\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{y})}$$

Calcular, si es posible, las derivadas parciales de  $f$  en el punto  $(0, 0)$ .

---

(c) Las derivadas parciales de  $f$  en el punto  $(0, 0)$  son

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}\end{aligned}$$

Observamos que

$$f(t, 0) = f(0, t) = 0 = f(0, 0)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0$$

para todo  $t \neq 0$  y concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0\end{aligned}$$

- (6) Dada la función  $f(x, y) = \log(2x^2 + y^2 + 1)$ ,
- (a) Calcula el polinomio de Taylor de orden dos de  $f$  en torno al punto  $(0, 0)$ .
  - (b) Utilizando el apartado anterior, calcula razonadamente una aproximación del valor de  $f(0'1, -0'2)$ .
  - (c) Considerar la función anterior  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre el conjunto  $A = [0, 1] \times [0, 1]$ . Hallar de forma justificada, en caso de que existan, el máximo y el mínimo de  $f$  en  $A$ .
- 

(a) Observamos en primer lugar que

$$f(0, 0) = 0$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{4x}{2x^2 + y^2 + 1} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{2x^2 + y^2 + 1}\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0\end{aligned}$$

Fácilmente se calcula también el Hessiano de  $f$ ,

$$H f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo que el polinomio de Taylor de orden dos de  $f$  en torno al punto  $(0, 0)$  es

$$P_2(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$(b) \quad f(0'1, -0'2) \approx P(0'1, -0'2) = 2(0'1)^2 + (-0'2)^2 = 0'02 + 0'04 = 0'06.$$

(c) En el apartado (a) hemos calculado

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{4x}{2x^2 + y^2 + 1} > 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{2x^2 + y^2 + 1} > 0\end{aligned}$$

si  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Por tanto, en el conjunto  $A$ , la función es estrictamente creciente en cada una de las variables por separado. De aquí se deduce que el máximo se alcanza en el punto  $(1, 1)$  y el mínimo en el punto  $(0, 0)$ .

- (7) Dada la función  $f(x, y) = x^4 - 6x^2 + y^2$
- (a) Obtén los puntos críticos de  $f$  y clasifícalos.
  - (b) Determina los conjuntos abiertos donde  $f$  es estrictamente cóncava y/o convexa.
  - (c) Determina razonadamente si  $f$  alcanza máximo y/o mínimo globales (o absolutos) en el conjunto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3\}$ , indicando en caso afirmativo en qué punto o puntos lo hace.
- 

(a) Los puntos críticos deben satisfacer la condición necesaria de primer orden:  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  o bien que no exista el gradiente  $\nabla f(x, y)$ . Haciendo las dos derivadas parciales obtenemos

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (4x^3 - 12x, 2y)$$

e igualando a 0 quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 4x^3 - 12x &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} 4x(x^2 - 3) &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} 4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

resolviéndolas obtenemos las soluciones  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$  y  $(-\sqrt{3}, 0)$ . Dado que el gradiente existe siempre al tratarse de una función polinómica, los puntos anteriores son todos los puntos críticos posibles.

Para clasificarlos aplicamos la condición suficiente de segundo orden. Para ello construimos la matriz hessiana

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y estudiamos su signo sobre los puntos críticos, así obtenemos en  $(0, 0)$  que la matriz queda  $\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  que es indefinida pues sus autovalores son de signos distintos (o bien por el criterio de los menores principales  $|A_{11}| = -12 < 0$ ,  $|A_{22}| = |A| = -24 < 0$ ) luego se trata de un punto de silla; haciendo lo mismo en los puntos  $(\sqrt{3}, 0)$  y  $(-\sqrt{3}, 0)$  queda en ambos casos la misma matriz Hessiana  $\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  que es definida positiva pues sus autovalores son positivos (o bien por el criterio de los menores principales  $|A_{11}| = 24 > 0$ ,  $|A_{22}| = |A| = 48 > 0$ ) por lo tanto se trata de dos mínimos locales.

(b) En el apartado anterior hemos calculado la matriz hessiana

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = 12x^2 - 12$  y  $\lambda_2 = 2$ . Como  $\lambda_2 > 0$  la función nunca es convexa. Por otra parte será estrictamente convexa en los conjuntos abiertos en los que  $\lambda_1 = 12x^2 - 12 > 0$ , es decir si  $x^2 > 1$ . Por tanto, la función es estrictamente convexa en los conjuntos  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$  y  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ .

(c) El conjunto  $D$  es abierto y convexo. Por tanto, los puntos extremos de  $f$  en  $D$  son puntos críticos de  $f$ . Además, del apartado (b) se deduce que  $f$  es estrictamente convexa en  $D$ , por lo que los puntos críticos de  $f$  en  $D$  son mínimos globales de  $f$  en  $D$ . Por el apartado (a) el único punto crítico de  $f$  en  $D$  es  $(\sqrt{3}, 0)$ , por lo que éste es el único mínimo (local y) global y no tiene máximos globales (ni locales) en  $D$ .

- (8) Considerar la función  $f(x, y) = 2 + (x - y)^2$  y el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .
- (a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de  $f$  en  $A$ .
  - (b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y clasificar los extremos de  $f$  en  $A$ .
- 

(a) El lagrangiano es

$$L(x, y) = 2 + (x - y)^2 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

Obtenemos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned}2(x - y) &= 2x\lambda \\ -2(x - y) &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

(b) Las soluciones del sistema anterior son

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Como  $f(A) = f(D) = 2$  y  $f(B) = f(C) = 4$  obtenemos que los puntos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &\quad \text{son mínimos} \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &\quad \text{son máximos}\end{aligned}$$