Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Junio de 2004.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + 2z &= 2 \\ 3x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}$$

donde a y b son parámetros.

(a) Clasificar el sistema según los valores de los parámetros a y b.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de los parámetros a y b en que es compatible indeterminado.

(a) La matriz asociada al sistema es

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{array}\right)$$

Realizando operaciones elementales por filas obtenemos

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 8 & -3b & -8 \\ 0 & 2a & 2-ab & 2-3a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 8 & -3b & -8 \\ 0 & 0 & 2-\frac{ab}{4} & 2-a \end{array}\right)$$

Vemos que si $ab \neq 8$ entonces rango$(A) =$ rango$(A|b) = 3$ y el sistema es compatible determinado.

Supongamos ahora que $ab = 8$. En particular, $b \neq 0$. Sustituyendo $a = 8/b$, obtenemos que el sistema $(A|b)$ es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 8 & -3b & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{8}{b} \end{array}\right)$$

Y vemos que si $a = 8/b$, con $b \neq 4$, entonces rango$(A) = 2 <$ rango$(A|b) = 3$ y el sistema es incompatible.

Finalmente, si $a = 2$ y $b = 4$, entonces rango$(A) =$ rango$(A|b) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. En resumen,

$$\begin{cases} ab \neq 8 & \text{el sistema es compatible determinado,} \\ ab = 8, b \neq 4 & \text{el sistema es incompatible} \\ a = 2, b = 4 & \text{el sistema es compatible indeterminado.} \end{cases}$$

(b) El sistema es compatible indeterminado para $a = 2$, $b = 4$. En el apartado anterior hemos visto que el sistema original es equivalente al siguiente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 8 & -3b & -8 \\ 0 & 0 & 2-\frac{ab}{4} & 2-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Tomando z como parámetro, las soluciones son de la forma

$$x = 1 - z, \qquad y = -1 + \frac{3}{2}z, \quad z \in \mathbb{R}$$

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde a y b son parámetros reales.

(a) Determinar para qué valores de a y b la matriz es diagonalizable.

(b) Para los valores de a y b que hacen que la matriz A sea diagonalizable, calcular su forma diagonal y la matriz de paso.

(a) El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

y los valores son propios son

valor propio	multiplicidad
$\lambda_1 = 1$	2
$\lambda_2 = 2$	1

La matriz es diagonalizable si y sólo si $\dim S(1) = 2$. Recordemos que $\dim S(1) = 3 - \mathrm{rango}(A - I)$. Por otra parte,

$$\mathrm{rango}(A - I) = \mathrm{rango} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0, \\ 2 & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Por lo que A es diagonalizable si y sólo si $a = 0$, independientemente del valor de b.

(b) La matriz es diagonalizable si y sólo si $a = 0$. Calculamos los vectores propios para este caso. Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ son la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es $z = 0$, por lo que

$$S(1) = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$$

Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 2$ son la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es $y = bz$, $x = z$, por lo que

$$S(2) = \{(z, bz, z) : z \in \mathbb{R}\} =< (1, b, 1) >$$

Obtenemos $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Dada la forma cuadrática $Q(x,y,z) = x^2 + ay^2 + z^2 - 2axy + 2xz - 2yz$,

(a) Determinar para qué valores de $a \neq 1$, la forma cuadrática es definida positiva, definida negativa o indefinida.

(b) Clasificar la forma cuadrática para $a = 1$. Sugerencia: Calcular los valores propios de la matriz asociada.

(a) La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los menores principales

$$D_1 = 1 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & a \end{vmatrix} = a - a^2 = a(1-a)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -a & a & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & a-a^2 & a-1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 < 0$$

Como $D_1 > 0$, $D_3 < 0$, la forma cuadrática es indefinida para todos los valores de $a \neq 1$.

(b) Sustituimos $a = 1$ y calculamos los valores propios. El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(3-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$, por lo que la forma cuadrática es semidefinida positiva.

(4) Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z,t) = (x + 2y + t, -5x - 9y - 4z, -8x - 14y - 8z + 2t)$$

(a) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$. Calcular las dimensiones del núcleo ($N(f)$) y de la Imagen ($\mathrm{Im}(f)$).

(b) Expresar $\mathrm{Im}(f)$ como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales independientes.

(a) La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -4 & 0 \\ -8 & -14 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
\text{rango} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -4 & 0 \\ -8 & -14 & -8 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right) &= \text{rango} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -8 & 10 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x \\ y + 5x \\ z + 8x \end{array} \right) \\
&= \text{rango} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x \\ y + 5x \\ z + 8x - 2(y + 5x) = z - 2x - 2y \end{array} \right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por tanto $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \text{rango}(A) = 2$. Y como $4 = \dim(N(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, tenemos que $\dim(N(f)) = 2$.

(b) La imagen de f está generada por los vectores que forman las columnas de A. Es decir,

$$\mathrm{Im}(f) = < (1, -5, -8), (2, -9, -14), (0, -4, -8), (1, 0, 2) > = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2x - 2y = 0\}$$

según hemos visto en el apartado anterior.

(5) Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le a^2, y^2\le a^2\}$, con $a>0$ y $f(x,y)=e^{x^2+y}$.

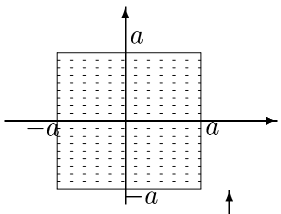
(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior. ¿Es A acotado?

(b) Dibujar las curvas de nivel de f. Sugerencia: considera las curvas de nivel

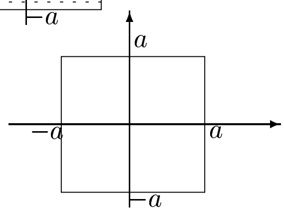
$$C_{e^k}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=e^k\}$$

(c) Enunciar el Teorema de Weierstrass. Hallar el máximo y el mínimo de f en A. Sugerencia: Compara las curvas de nivel anteriores C_{e^k} y $C_{e^{k'}}$ para valores $k<k'$.

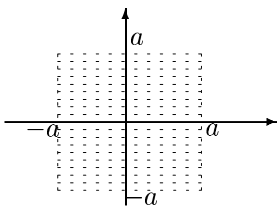
(a) Observemos que $x^2\le a^2$ con $a>0$ es equivalente a $-a\le x\le a$ por lo que el conjunto A es el siguiente.



La frontera es

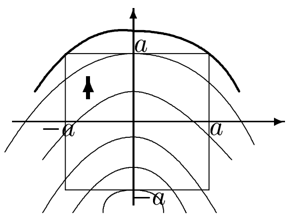


Y el interior es



Claramente, A es acotado.

(a) Observamos que $e^{x^2+y}=e^k$ si y sólo si $x^2+y=k$. Las curvas de nivel son las parábolas $y=k-x^2$ con $k\in\mathbb{R}$. Estas parábolas tiene su extremo superior en el punto $(0,k)$.



El vector indica la dirección en la que la función crece.

(c) Teorema de Weierstrass: Si f es una función continua en un conjunto compacto A, entonces f alcanza un máximo y un mínimo en el conjunto A.

Comparando las curvas de nivel de f del apartado anterior y la forma en que crecen vemos que el mínimo se alcanza en el punto $(0,-a)$ y el máximo en los puntos $(-a,a)$ y (a,a).

(6) (a) Escribe la definición de función continua en un punto. Escribe la definición de función diferenciable en un punto.

(b) ¿Es continua la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4} & \text{Si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{Si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$?

(c) Halla las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$. ¿Es diferenciable f en $(0,0)$?

(a) La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $p \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

es decir, si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\|x - p\| < \delta$.

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $p \in \mathbb{R}^n$ si existe el gradiente $\nabla f(p)$ y

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} = 0$$

(b) Tomado la recta $x = y = t$, tenemos que

$$\lim_{t \to 0} f(t,t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2(1+t^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{(1+t^2)} = 1$$

mientras que tomando la recta $x = 0$, $y = t$ tenemos que

$$\lim_{t \to 0} f(0,t) = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t^4} = 0$$

por lo que el límite no existe y la función no es continua en $(0,0)$.

(c) Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

La función no es diferenciable en $(0,0)$, ya que no es continua en ese punto.

(7) Dada al función $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 4\ln(xy)$,

(a) Determina el dominio de f.

(b) Obtén los puntos críticos de f y clasifícalos.

(c) Determina razonadamente si f alcanza el máximo ó mínimo global (o absoluto) en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0,\, y > 0\}$, indicando en caso afirmativo en qué punto (o puntos) lo hace.

(a) El Dominio de f es el conjunto

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | : xy > 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\, y < 0\}\end{aligned}$$

es decir, el primer y tercer cuadrante del plano.

(b) Los puntos críticos deben satisfacer la condición necesaria de primer orden: el gradiente vale cero, $\nabla f(x,y) = (0,0)$ o bien no existe. Haciendo las dos derivadas parciales obtenemos

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (x - \frac{4}{x}, y - \frac{4}{y})$$

e igualando a 0 quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= \frac{4}{x} \\ y &= \frac{4}{y}\end{aligned}$$

Obtenemos las soluciones $(2,2)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$ y $(-2,2)$. Las soluciones $(2,-2)$, $(-2,2)$ las descartamos pues estos puntos no están en el Dominio de f. Como el gradiente existe siempre en el Dominio de la función los puntos anteriores son todos los posibles puntos críticos. Para clasificar estos puntos aplicamos la condición suficiente de segundo orden. Para ello construimos la matriz hessiana

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{x^2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4}{y^2} \end{pmatrix}$$

y estudiamos su signo sobre los puntos críticos,

$$\mathrm{H}f(2,2) = \mathrm{H}f(-2,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es claramente definida positiva pues sus autovalores son positivos. Luego $(2,2)$ y $(-2,-2)$ son ambos mínimos relativos.

(c) El teorema de Weierstrass no es aplicable, pues el conjunto D no es compacto (no es ni cerrado ni acotado). Recordemos que si f es convexa en D y f tiene un mínimo local en D entonces el mínimo es global. La matriz hessiana de f es

$$\mathrm{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{x^2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4}{y^2} \end{pmatrix}$$

que es definida positiva en todos los puntos (x,y) del dominio de f (los valores propios son $\lambda_1 = 1 + \frac{4}{x^2} > 0$, $\lambda_2 = 1 + \frac{4}{y^2} > 0$). Por lo tanto, la función f es convexa en D y en el punto $(2,2)$ alcanza el mínimo global, cuyo valor es $f(2,2) = \frac{2^2}{2} + \frac{2^2}{2} - 4\ln(4) = 4 - 4\ln(4)$.

Como D es un conjunto abierto los extremos de f en ese conjunto son puntos críticos de f. En el apartado anterior hemos visto que el único punto crítico de f en D es $(2,2)$, que corresponde a un mínimo. Por lo tanto f no alcanza un máximo global en D.

(8) Considerar la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2$ y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A y determinar los puntos que las satisfacen.

(b) Hallar el máximo y el mínimo de f en A.

(c) Hallar el máximo y el mínimo de f en en el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) El lagrangiano es

$$L(x,y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

Derivando obtenemos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2 + 4x - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 3y^2 + 4y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} x(3x + 4 - 2\lambda) &= 0 \\ y(3y + 4 - 2\lambda) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Obtenemos inmediatamente las soluciones $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ entonces $0 = 3x + 4 - 2\lambda = 3y + 4 - 2\lambda$ es decir, $x = y$ Sustituyendo en la tercera ecuación tenemos también las soluciones

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

(b) Evaluamos la función en los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} f(0,1) = f(1,0) &= 3 \\ f(0,-1) = f(-1,0) &= 1 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) &= -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 2 = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

vemos que

$$1 < 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 3$$

El máximo se alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$. El mínimo se alcanza en los puntos $(0,-1)$ y $(-1,0)$.

(c) En el apartado anterior hemos hallado los puntos extremos en la frontera del conjunto B. Vamos a calcular los puntos extremos de f en el interior de B, es decir en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Como este conjunto es abierto, los extremos de f son puntos críticos de esta función. Las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 4x = x(3x + 4) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 4y = y(3y + 4) = 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $(0,0), (0, \frac{-4}{3}), (\frac{-4}{3}, 0), (\frac{-4}{3}, \frac{-4}{3})$. Pero, $\left(\frac{-4}{3}\right)^2 > 1$ por lo que el único punto crítico de f en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ es $(0,0)$. Como $f(0,0) = 0$ obtenemos que

$(0,0)$ es el mínimo global de f en B

$(0,1), (1,0)$ son los máximos globales de f en B