

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

(1) Dado el sistema de ecuaciones,

1 punto

$$\left. \begin{aligned} x + az &= b \\ ax + 2y + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- (a) Discute para qué valores de a y b el sistema es compatible (determinado y/o indeterminado).
(b) Resuelve el sistema en el caso en que $a = 1$, $b = 1$.

(2) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

1'5 puntos

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, x + y + 3z, z)$$

- (a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas y las dimensiones del núcleo y de la imagen.
(b) Hallar una base de la imagen de f y una base del núcleo de f .
(c) Hallar un sistema de ecuaciones linealmente independientes del núcleo y de la imagen.

(3) Dada la matriz siguiente

1'5 puntos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
(b) Suponiendo que la matriz es diagonalizable, halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.
(c) Calcula la potencia n -ésima, A^n de la matriz A . (Deja el producto indicado como producto de tres matrices, sin calcular la matriz inversa)

(4) Dado el conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

1'5 puntos

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^4 \text{ y } y \leq 2x^3\}$$

se pide:

- (a) Dibuja el conjunto $\mathcal{D}$ y halla los puntos de corte de las curvas que lo limitan.
(b) Estudia si $\mathcal{D}$ es *cerrado*, *abierto*, *acotado*, *compacto* y *convexo*. Razona la respuesta.
(c) Halla razonadamente los valores de b para que se pueda asegurar que la función

$$f(x, y) = \frac{1}{(x-5)^2} + \frac{1}{(y-b)^2}$$

alcanza el valor máximo y el valor mínimo en $\mathcal{D}$.

(5) Sea $f(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, la función de producción de Cobb-Douglas.

1 punto

- (a) Suponiendo que la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(1, 1)$ viene dada por el vector unitario $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$, hallar α .
(b) Suponiendo que la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto $(1, 1)$ es $x + 2y = 3$, hallar α .

Observación: Los valores de α hallados en los apartados (a) y (b) no tienen por qué coincidir.

(6) Considera la función $f(x, y) = 4ax^2 - 2by^2 - xy + 3y + 4x + 1$.

1 punto

- (a) Discutir, según los valores de los parámetros a y b , cuándo f es estrictamente cóncava.
(b) Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de $g(x, y) = x^3 + 4x^2 + 2y^2 - xy + 3y + 4x + 1$ alrededor del punto $(0, 0)$.

(7) Considera la función $f(x, y) = ax^2 + y^3 - 2x - 3y$.

1 punto

- (a) Hallar los puntos críticos de f y clasificarlos en función de a para $a \neq 0$.
(b) Considérese el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Discutir según los valores de a si f alcanza extremos absolutos en A .

(8) Sean

1'5 puntos

$$f(x, y) = 4x - 2x^2 - 2y^2$$

y

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

- (a) Hallar los puntos críticos de f en el interior de S .
(b) Hallar los puntos sobre la frontera de S , que cumplen las condiciones de Lagrange para f .
(c) Hallar los extremos globales de f en el conjunto S .
-