

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2002.

Modelo 1

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

(1) Dada la función,

1 punto

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4, x_3 + x_4, 3x_2 + x_4)$$

- (a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas y su rango.
 - (b) Hallar la dimensión de la imagen, la dimensión del núcleo de f y una base de la imagen de f .
-

(2) Dado el siguiente sistema de ecuaciones,

1.5 puntos

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y + z = c \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{array} \right\}$$

- (a) Discute el sistema para los distintos valores de a y c .
 - (b) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible determinado.
 - (c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.
-

(3) Dada la matriz siguiente

1.5 puntos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
 - (b) Comprueba que la matriz es diagonalizable.
 - (c) Halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.
-

(4) Considera el conjunto $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 20, y \geq x^2\}$.

1.5 puntos

- (a) Dibuja el conjunto y su frontera, hallando los puntos de corte de las curvas que la definen.
- (b) Discute si el conjunto es cerrado, acotado y/o convexo.
- (c) Sea la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+2)^2 + y^2}$$

Discute, enunciando los teoremas que utilices, si f alcanza máximo y/o mínimo en A .

(5) Sea $f(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$, la función de producción de Cobb-Douglas, donde $x > 0$ e $y > 0$ representan las unidades de trabajo y capital, respectivamente y $f(x, y)$ las unidades producidas.

1 punto

- (a) Hallar el gradiente de f en el punto (a, a) , siendo $a > 0$.

- (b) Supongamos que $\alpha = 1/4$. Hallar el polinomio de Taylor, $P(x, y)$, de orden 1 de f en el punto (a, a) , siendo $a > 0$. Calcular $P(a + 0'1, a + 0'2)$.

(6) Considera la función $f(x, y) = 2ax^2 + by^2 + xy - 2y - 7x + 12$. **1 punto**

- (a) Discutir, según los valores de los parámetros a y b , cuándo f es estrictamente cóncava, suponiendo que ambos son distintos de 0.
- (b) Discutir, según los valores de los parámetros a y b , cuándo f es estrictamente cóncava, cuando alguno de ellos es 0.

(7) Considera la función $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2axy$. Se pide **1'5 puntos**

- (a) Hallar los puntos críticos de f para el caso en que $a \neq 0$.
- (b) Clasificar los puntos críticos de f para el caso $a \neq 0$.
- (c) Hallar y clasificar los puntos críticos de f para el caso $a = 0$.

(8) Considera la función $f(x, y) = (x + 1)^3 + y^2$. **1 punto**

- (a) Escribe las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
- (b) Calcula y clasifica los extremos de f en el conjunto A .
-