

**HOJA 5: Optimización**

- 5-1. Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y clasificarlos:
- (a)  $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ .
  - (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ .
  - (c)  $f(x, y) = e^{x \cos y}$ .
  - (d)  $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$ .
  - (e)  $f(x, y) = x \sin y$ .
  - (f)  $f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$ .
- 5-2. Hallar para las siguientes funciones los puntos críticos. Aplicar el criterio de las derivadas segundas y mostrar aquellos puntos en los que el criterio no proporciona información.
- (a)  $f(x, y) = x^3 + y^3$ .
  - (b)  $f(x, y) = ((x-1)^2 + (y+2)^2)^{1/2}$ .
  - (c)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 7$ .
  - (d)  $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$ .
- 5-3. Sea  $f(x, y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$ .
- (a) Hallar los puntos críticos y clasificarlos.
  - (b) ¿Posee  $f$  extremos absolutos? (sug: considerar la recta  $y = x$ )
- 5-4. Hallar los valores de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de forma que la función  $f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$  tenga un mínimo local en el punto  $(2/3, 1/3)$  con valor en ese punto de  $-1/9$ .
- 5-5. Una función de ingreso es  $R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y)$  en donde  $x$  e  $y$  denotan el número de artículos vendidos de dos productos. Dado que la función de coste correspondiente es  $C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20$  determinar el beneficio máximo.
- 5-6. Una lechería produce leche entera y descremada en cantidades  $x$  e  $y$  respectivamente. Supongamos que el precio de la leche entera es  $p(x) = 100 - x$  y el de la descremada  $q(y) = 100 - y$ . Supongamos que  $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$  es la función de costes. ¿Cuáles deberían de ser  $x$  e  $y$  para maximizar los beneficios?
- 5-7. Un monopolista produce un bien que es comprado por dos tipos de consumidores. Los consumidores del tipo 1 están dispuestos a pagar  $50 - 5q_1$  euros para comprar  $q_1$  unidades del bien. Los consumidores del tipo 2 estarían dispuestos a pagar  $100 - 10q_2$  euros para comprar  $q_2$  unidades del bien. La función de costes del monopolista es  $c(q) = 90 + 20q$  euros. ¿Cuánto debe producir el monopolista en cada mercado?
- 5-8. Hallar los extremos de las siguientes funciones sujetas a restricciones.
- (a)  $f(x, y, z) = x + y + z$  en  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .
  - (b)  $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$  en  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 5-9. Minimizar  $x^4 + y^4 + z^4$  sobre el plano  $x + y + z = 1$ .
- 5-10. Una compañía fabrica productos  $P_1$  y  $P_2$ . Los ingresos totales para  $x_1$  unidades de  $P_1$  y  $x_2$  unidades de  $P_2$  son  $R = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 2x_1x_2 + 42x_1 + 102x_2$ . Hallar  $x_1$  y  $x_2$  de forma que los ingresos sean máximos.
- 5-11. Los precios de venta de dos productos producidos por un monopolista son

$$p_1 = 256 - 3q_1 - q_2$$

$$p_2 = 222 + q_1 - 5q_2$$

donde  $p_1$ ,  $p_2$  son los precios y  $q_1$ ,  $q_2$  son las cantidades producidas. La función de costes es  $C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2$ . Hallar las cantidades de cada producto que maximizan los beneficios.

- 5-12. La función de producción de un fabricante es  $4x + xy + 2yz$ . La cantidad total disponible para trabajo y capital es de 2000\$. Las unidades de trabajo y capital cuestan 20\$ y 4\$ respectivamente.
- Razona que  $20x + 4y = 2000$ .
  - Halla el nivel máximo de producción del fabricante con la restricción del apartado anterior.
- 5-13. A un editor se le han asignado 60.000 para gastar en producción y publicidad de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan  $x$  miles de dólares e  $y$  miles de dólares en publicidad se venderán aproximadamente  $f(x, y) = 20x^{3/2}y$  ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor a producción y cuánto a publicidad para maximizar las ventas?
- 5-14. Un minorista vende dos productos que se hacen competencia, y cuyos precios respectivos son  $P_1$  y  $P_2$ . Hallar  $P_1$  y  $P_2$  de forma que los ingresos sean máximos siendo  $R = 500P_1 + 800P_2 + 1, 5P_1P_2 - 1, 5P_1^2 - P_2^2$ .
- 5-15. La función de utilidad de un consumidor es  $u(x, y) = \frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3} \ln y$  siendo  $x$  e  $y$  el consumo realizado de dos bienes, cuyos precios son, respectivamente,  $p_1$  y  $p_2$ . Suponiendo que el agente dispone de una renta  $M$ , calcular las cantidades que demandará de cada bien, dependiendo de la renta  $M$  y de los precios.
- 5-16. Hallar y clasificar los puntos extremos de la función dada en el conjunto correspondiente.
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  en el conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 1, 2x - 3y - z = 4\}$ .
  - $f(x, y, z) = (y + z - 3)^2$  en el conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y + z = 2, x + y^2 + 2z = 2\}$ .
  - $f(x, y, z) = x + y + z$  en el conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - y - z = 1\}$ .
  - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  en el conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, x + y + z = 4\}$ .
- 5-17. Encontrar el máximo de la función  $f(x, y, z) = xyz$  en el conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, \quad x, y, z \geq 0\}$ .
- 5-18. Encontrar el mínimo de la función  $f(x, y) = 2y - x^2$  en el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x, y \geq 0\}$ .
- 5-19. Resolver el problema

$$\begin{cases} \min & x^2 + y^2 - 20x \\ \text{s.a.} & 25x^2 + 4y^2 \leq 100 \end{cases}$$

- 5-20. Resolver el problema

$$\begin{cases} \max & x + y - 2z \\ \text{s.a.} & z \geq x^2 + y^2 \\ & x, y, z \geq 0 \end{cases}$$