

HOJA 3: Derivadas parciales y diferenciación.

3-1. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ para las siguientes funciones.

- (a) $f(x, y) = x \cos x \sin y$
- (b) $f(x, y) = e^{xy^2}$
- (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

3-2. Determinar la productividad marginal de cada factor para la siguiente función de producción Cobb-Douglas

$$F(x, y, z) = 12x^{1/2}y^{1/3}z^{1/4}$$

3-3. Calcular el gradiente de las siguientes funciones en el punto p indicado.

- (a) $f(x, y) = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ en $p = (a/2, a/2)$.
- (b) $g(x, y) = \ln(1 + xy)^{1/2}$ en $p = (1, 1)$.
- (c) $h(x, y) = e^y \cos(3x + y)$ en $p = (2\pi/3, 0)$.

3-4. Sea la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \sin(xy) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.
- (b) Comprobar que f es continua en $\mathbb{R}^2$. (*sug*: Utilizar (demostrando primero) que si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1)$$

- (c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

3-5. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
- (b) Calcula las derivadas parciales en el punto $(0, 0)$.
- (c) ¿En qué puntos es diferenciable la función?

3-6. Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \frac{x^3 y}{x^2 + 2y^2} \cos(xy) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.
- (b) Comprobar que f es continua en $\mathbb{R}^2$. (*sug*: Observa que si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces

$$\frac{1}{x^2 + 2y^2} \leq \frac{1}{x^2 + y^2})$$

- (c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

3-7. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en el punto p según el vector v indicados en cada caso.

- (a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, con $p = (1, 2)$, $v = (3, 4)$
- (b) $g(x, y) = e^{xy} + y \arctg x$, con $p = (1, 1)$, $v = (1, -1)$
- (c) $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, con $p = (0, 5)$, $v = (1, -1)$.

3-8. Sea $B(x, y) = 10x - x^2 - \frac{1}{2}xy + 5y$ los beneficios de una empresa. El año pasado vendió $x = 4$ unidades de la mercancía 1 e $y = 2$ unidades de la mercancía 2. Si este año desea aumentar sus ventas en una pequeña cantidad de la forma más beneficiosa posible, ¿a qué deberá ser igual $\frac{\Delta x}{\Delta y}$?

- 3-9. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 7$ y $D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})}f(2, 3) = 3\sqrt{5}$ obtener $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$ y $D_v f(2, 3)$ con $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
- 3-10. Dada la función $f(x, y, z) = xy^2 + z^2y$, calcula la derivada según el vector $v = (1, -1, 2)$ en el punto $(1, 1, 0)$. Determina la dirección para la que se maximiza (resp. minimiza) la derivada direccional en el punto $(1, 1, 0)$, así como su valor.
- 3-11. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ y $g(x, y) = (x + y, ay)$ determinar,
 (a) El valor de a para que la función $f \circ g$ tenga como dirección de máximo crecimiento la del vector $v = (5, 7)$ en el punto $p = (1, 1)$.
 (b) Las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$ en el punto $(4, 2)$.
- 3-12. Calcular la matriz Jacobiana de F en los casos siguientes.
 (a) $F(x, y, z) = (xyz, x^2z)$
 (b) $F(x, y) = (e^{xy}, \ln x)$
 (c) $F(x, y, z) = (\sin xyz, xz)$

- 3-13. Utilizando la regla de la cadena calcula las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

en los casos siguientes.

- (a) $z = x^2 - 2xy + y^2$, $x = r + \theta$, $y = r - \theta$
 (b) $z = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
- 3-14. La utilización del capital K en el instante t genera unos beneficios en ese momento de

$$B(t) = 5(1 + t)^{1/2}K$$

Supongamos que el capital varía en el tiempo según la ecuación $K(t) = 120e^{t/4}$. Determinar la tasa de cambio de B .

- 3-15. Verificar la regla de la cadena para la función $h = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ con $x = e^t$, $y = e^{t^2}$ y $z = e^{t^3}$.
- 3-16. Verificar la regla de la cadena para la composición $f \circ c$ en los casos.
 (a) $f(x, y) = xy$, $c(t) = (e^t, \cos t)$.
 (b) $f(x, y) = e^{xy}$, $c(t) = (3t^2, t^3)$.
- 3-17. Expresar mediante la regla de la cadena $h'(x)$ en los siguientes casos.
 (a) $h(x) = f(x, u(x, a))$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.
 (b) $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.
- 3-18. Determinar en qué puntos la superficie $z = e^{(x-1)^2 + y^2}$ tiene un plano tangente horizontal y calcular su ecuación en esos puntos.
- 3-19. Considerar la función $f(x, y) = (xe^y)^3$.
 (a) Calcular el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 0)$.
 (b) Aproximar, utilizando el plano tangente a la gráfica de f , el valor de $(1, 999e^{0,002})^3$.
- 3-20. Calcular el plano tangente y la recta normal a las superficies de nivel en los puntos que se indican a continuación.
 (a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - z = 0$ en el punto $(1, 1, 5)$.
 (b) $x^2 + y^2 - z = 0$ en el punto $(1, 2, 5)$.
 (c) $(y - x^2)(y - 2x^2) - z = 0$ en el punto $(1, 3, 2)$.
- 3-21. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones cuyas derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$.
 (a) Probar que si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

para todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ sólo depende de y .

(b) Probar que si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

para todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ sólo depende de x .

(c) Probar que si $\nabla(f - g)(x, y) = (0, 0)$ para todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f - g$ es constante en todo $\mathbb{R}^2$.

(d) Encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2x + y, \quad f(0, 0) = 1$$

¿Hay más funciones que verifiquen estas condiciones?