

HOJA 2: Límites y continuidad de funciones en $\mathbb{R}^n$.

- 2-1. Dibuja cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes. Dibuja su frontera y su interior. Estudia si son abiertos, cerrados, acotados o convexos.
- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < 2\}$.
 - (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\}$.
 - (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 2\}$.
 - (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.
 - (e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2, y < 1/x, x > 0\}$.
 - (f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq y + 1\}$.
 - (g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq 1\}$.
- 2-2. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Discute la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
- (a) $\text{Int}(A) = A - \text{Fr}(A)$.
 - (b) $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(\mathbb{R}^2 - A) = \text{Fr}(A^C)$.
 - (c) $\text{Fr}(A)$ está acotada.
 - (d) A es cerrado $\iff A^C$ es abierto.
 - (e) A es acotado $\iff A^C$ no es acotado.
 - (f) A es cerrado $\iff \text{Fr}(A) \subset A$.
 - (g) A es abierto $\iff \text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
- 2-3. Halla el dominio de las siguientes funciones:
- (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{1/2}$.
 - (b) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$.
 - (c) $f(x, y) = e^x - e^y$.
 - (d) $f(x, y) = e^{xy}$.
 - (e) $f(x, y) = \ln(x + y)$.
 - (f) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
 - (g) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{yz}}$.
 - (h) $f(x, y) = \sqrt{x - 2y + 1}$.
- 2-4. Halla la imagen de las siguientes funciones:
- (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$.
 - (b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
 - (c) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
 - (d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
 - (e) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.
 - (f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 2-5. Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones para los valores de c propuestos:
- (a) $f(x, y) = xy$, $c = 1, -1, 3$.
 - (b) $f(x, y) = e^{xy}$, $c = 1, -1, 3$.
 - (c) $f(x, y) = \ln(xy)$, $c = 1, -1, 3$.
 - (d) $f(x, y) = (x + y)/(x - y)$, $c = 0, 2, -2$.
 - (e) $f(x, y) = x^2 - y$, $c = 0, 1, -1$.
 - (f) $f(x, y) = ye^x$, $c = 0, 1, -1$.
- 2-6. Sea $f(x, y) = Cx^\alpha y^{1-\alpha}$ (con $0 < \alpha < 1$ y $C > 0$) la función de Cobb-Douglas donde x e y representan las unidades de trabajo y capital respectivamente y f las unidades producidas.
- (a) Halla, representa e interpreta distintas curvas de nivel de f .

- (b) Demuestra que si se duplican las unidades de trabajo y las de capital, entonces se duplica el nivel de producción.

2-7. Estudia la existencia y el valor de los siguientes límites.

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}.$
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}.$
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}.$
- (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$
- (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$
- (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}.$

2-8. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- (a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$
- (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy+1}{y}x^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$
- (c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^6+y^3} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}.$
- (d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

2-9. Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$f(x, y) = \left(\frac{x+1}{y+2}, \frac{y+1}{x+2} \right)$$

Comprueba que se verifican las hipótesis del Teorema de Brouwer. ¿Es posible determinar el (o los) punto(s) fijo(s)?

2-10. Considera la función $f(x, y) = 3y - x^2$ definida en el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x < 1/2, y \geq 0\}$. Dibuja el conjunto D y las curvas de nivel de f . Alcanza f un máximo y un mínimo sobre D ?

2-11. Sean los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ y sea la función

$$f(x, y) = \frac{(x+1)(y+\frac{1}{5})}{y+\frac{1}{2}}$$

¿Qué se puede afirmar de los extremos absolutos de f sobre A y B ?

2-12. Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$.

- (a) Dibujar el conjunto A , su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
- (b) Demuestra que la función $f(x, y) = y^2 + (x-1)^2$ tiene un máximo y un mínimo en A .
- (c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x, y)$, hallar el máximo y el mínimo de f en A .

2-13. Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0; \ln(xy) \geq 0\}$.

- (a) Dibujar el conjunto A , su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
- (b) Considerar la función $f(x, y) = x + 2y$. ¿Se puede utilizar el teorema de Weierstrass para determinar si esta función alcanza un máximo y/o un mínimo en el conjunto A ? Dibujar las curvas de nivel de f , indicando la dirección de crecimiento de la función.
- (c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x, y)$, determinar gráficamente (sin utilizar, por tanto, las condiciones de primer orden) los extremos absolutos de la función f en el conjunto A .