

Hoja 1: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1-1. *Calcular los siguientes determinantes:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

Solución: La solución del apartado a) es -15 , la del apartado b) -36 y la del c) 32 .

1-2. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcúlese razonadamente el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

sacando el número 2 en cada una de las filas, obtenemos

$$2^3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix}$$

que, intercambiando las columnas 2 y 3 es

$$-2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

e intercambiando las filas 2 y 3,

$$2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2^3 \times 25 = 200$$

1-3. *Comprueba las siguientes identidades sin desarrollar los determinantes:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Solución: a): En el determinante,

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

multiplicamos y dividimos por a obtenemos

$$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Haciendo lo mismo con b , obtenemos que este determinante es el mismo que

$$\frac{1}{ab} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

y ahora con c ,

$$\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

pero sacando abc en la primera columna, obtenemos que la última expresión es igual a

$$\frac{1}{abc}abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

b): Sumando la segunda columna a la tercera en el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

porque las columnas 1 y 3 son iguales.

1-4. Resolver la ecuación sin desarrollar el determinante, utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución: Debemos suponer que $a \neq 0$, porque si no el determinante es 0 para cualquier valor real x . Como,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix}$$

la ecuación del enunciado (suponiendo $a \neq 0$) es equivalente

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix} = 0$$

Restamos la primera fila a la segunda y tercer filas y obtenemos la ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = (x-b)(x-c)$$

por lo que las soluciones son $x = b$ y $x = c$.

$$1-5. \text{ Calcula, simplificando previamente: } a) \begin{vmatrix} ab & 2b^2 & -bc \\ a^2c & 3abc & 0 \\ 2ac & 5bc & 2c^2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución: a): En el determinante

$$\begin{vmatrix} ab & 2b^2 & -bc \\ a^2c & 3abc & 0 \\ 2ac & 5bc & 2c^2 \end{vmatrix}$$

sacamos fuera a de la primera columna, b de la segunda y c de la tercera, con lo que obtenemos

$$abc \begin{vmatrix} b & 2b & -b \\ ac & 3ac & 0 \\ 2c & 5c & 2c \end{vmatrix}$$

y ahora sacamos b de la primera fila, a de la segunda y c de la tercera,

$$a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ c & 3c & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Finalmente sacamos c en la segunda fila

$$a^2b^2c^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3a^2b^2c^3$$

b): En el determinante

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix}$$

sacamos x en la primera fila y queda

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix}$$

Ahora restamos la primera fila, multiplicada por x , de todas las demás filas, con lo que queda

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & a-x & a-x \\ 0 & a-x & b-x & b-x \\ 0 & a-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna este determinante es igual a

$$x \begin{vmatrix} a-x & a-x & a-x \\ a-x & b-x & b-x \\ a-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$$

Ahora, restamos la primera fila de las demás,

$$x \begin{vmatrix} a-x & a-x & a-x \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix}$$

y sacamos $a-x$, en la primera fila, fuera del determinante,

$$x(a-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix}$$

que desarrollando por la primera columna es

$$x(a-x) \begin{vmatrix} b-a & b-a \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = x(a-x)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = x(a-x)(b-a)(c-b)$$

donde hemos sacado $b-a$ en la primera fila y hemos calculado el determinante 2×2 restante.

c): En el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

restamos la última fila de las filas 2 y 3 y desarrollamos por la primera columna

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

sumando ahora la primera fila a la segunda y desarrollando por la primera columna, otra vez,

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+2) = -3$$

1-6. Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = i + j$. Calcula su determinante

Solución: el determinante que nos piden calcular es

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & n+4 \\ 6 & 7 & 8 & \cdots & n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{vmatrix}.$$

Si $n = 2$, vemos que el determinante se reduce a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

Supongamos ahora que $n \geq 3$. Restamos la segunda fila a la tercera y queda lo siguiente

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & n+4 \\ 6 & 7 & 8 & \cdots & n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{vmatrix}$$

y ahora restamos la primera fila a la segunda, con lo que obtenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & n+4 \\ 6 & 7 & 8 & \cdots & n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{vmatrix} = 0$$

porque las filas 2 y 3 son iguales.

1-7. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^t A = I$. Demuestra que $|A| = \pm 1$.

Solución: Notemos que $1 = |I| = |A^t A| = |A^t| |A| = |A|^2$. Por lo que $|A|^2 = 1$ y los únicos valores posibles son $|A| = 1$ o $|A| = -1$.

1-8. Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: El rango

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es el mismo que (restando a la segunda fila la primera multiplicada por 2 y a la tercera fila la primera multiplicada por 4)

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Por otra parte,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

1-9. *Estudia, según los valores de x el rango de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 & 1 \\ 1 & x^2 & x^3 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos el rango de A . En primer lugar, nos fijamos en el menor

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -1$$

por lo que $\text{rg } A \geq 3$, independientemente de lo que valga x . Desarrollando por la tercera fila vemos que el determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y desarrollando por la fila 3 obtenemos

$$|A| = - \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -(x^2 - 1)$$

por lo que el rango es 4 si $x^2 \neq 1$, es decir si $x \neq 1$ y $x \neq -1$. Resumiendo,

$$\text{rg } A = \begin{cases} 3, & \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1; \\ 4, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Ahora calculamos el rango de B . Observemos que el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

no se anula, por lo que $\text{rg } B \geq 2$. Por otra parte

$$\text{rg } B = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 2-x & 4-x^2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y este rango es 3, excepto si $5(2-x) = 4-x^2$. Esto se verifica si y sólo si $x^2 - 5x + 6 = 0$, es decir si

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 2, 3$$

Resumiendo,

$$\text{rg } B = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 2 \text{ o } x = 3; \\ 3, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Finalmente, calculamos el rango de C .

$$\begin{aligned} \text{rg } C &= \text{rg} \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & x & 1-2x \\ 0 & x & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & x & 1-2x \\ 0 & 0 & x^2-1 & 1+x-2x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y este rango es 3, excepto si $x^2 - 1 = 0$ y $1 + x - 2x^2 = 0$. ¿Hay algún valor de x que resuelva simultáneamente estas dos ecuaciones? Las soluciones de $x^2 - 1 = 0$ son $x = 1$ y $x = -1$. Mientras que las soluciones de $2x^2 - x - 1 = 0$ son

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1, -\frac{1}{2}$$

Vemos que $x = 1$ es la única solución simultánea de las dos ecuaciones. Por tanto,

$$\text{rg } C = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 1; \\ 3, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

1-10. *Suponiendo que A y B son matrices regulares ($\det \neq 0$), y que hay conformidad de órdenes para poder realizar las operaciones, despeja la matriz X en las expresiones siguientes:*

(a) $X^t \cdot A = B$

(b) $(X \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B$

Calcula la matriz X en las ecuaciones anteriores si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a): Tomando transpuestas en la ecuación $X^t A = B$, obtenemos que $B^t = (X^t A)^t = A^t X$ y, despejando X , queda que $X = (A^t)^{-1} B^t = (A^{-1})^t B^t$. En el caso particular en que

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \quad B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

obtenemos que

$$X = (A^{-1})^t B^t = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -9 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b): Tomando inversas en la ecuación $(XA)^{-1} = A^{-1}B$ vemos que $XA = (A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}(A^{-1})^{-1} = B^{-1}A$. Y, como A es invertible, la podemos despejar $X = B^{-1}AA^{-1} = B^{-1}$. En el caso particular en que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

queda

$$X = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

1-11. Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Solución: Utilizando la fórmula para calcular la inversa de A , obtenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nosotros vamos a calcularla utilizando transformaciones elementales por filas. Empezamos con

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y le añadimos a la segunda fila la primera multiplicada por x , con lo que obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ahora restamos de la primera fila la tercera multiplicada por x ,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y a la segunda fila le restamos la tercera fila multiplicada por $\frac{x^2}{2}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

de donde se deduce la inversa de A . Calculamos ahora la inversa de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula se obtiene que

$$B^{-1} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \begin{pmatrix} x^2 + 3 & 1 & -x \\ -12 & x - 4 & 3 \\ 4x & 1 & -x \end{pmatrix}$$

También se puede hacer observando que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y le restamos a la tercera fila, la primera multiplicada por 4,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

intercambiamos las filas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

a la tercera fila le restamos la segunda multiplicada por t

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t^2 - 4t + 3 & 4t & 1 & -t \end{array} \right)$$

De aquí vemos que el determinante de A es $t^2 - 4t + 3$. Las raíces de este polinomio son

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 1, 3$$

por lo que la inversa existe si y sólo si $t \neq 1$ y $t \neq 3$. Suponiendo esto, podemos dividir la última fila por $t^2 - 4t + 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4t}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & -\frac{t}{t^2-4t+3} \end{array} \right)$$

y ahora sumamos la tercera fila a la primera y le sumamos a la segunda la tercera fila multiplicada por $t - 4$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{t^2+3}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & \frac{-t}{t^2-4t+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{t^2-4t+3} & \frac{t-4}{t^2-4t+3} & \frac{3}{t^2-4t+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4t}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & \frac{-t}{t^2-4t+3} \end{array} \right)$$

por lo que

$$A^{-1} = \frac{1}{t^2 - 4t + 3} \begin{pmatrix} t^2 + 3 & 1 & -t \\ -12 & t - 4 & 3 \\ 4t & 1 & -t \end{pmatrix}$$

1-12. *Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Utilizaremos el método de Gauss para calcular la inversa. Empezamos con la matriz

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

dividiendo la primera fila entre 4 obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y ahora restamos la tercera fila a la segunda, con lo que obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por 3,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ahora sumamos la tercera fila a la primera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

a la tercera fila le sumamos la segunda multiplicada por $3/2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

multiplicamos la tercera fila por -2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

y la tercera fila la sumamos a la segunda y la restamos a la primera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

con lo que la inversa es

$$\left(\begin{array}{ccc} 5/2 & 3 & 0 \\ -3/2 & -2 & 0 \\ -3/2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

El determinante de la matriz B es $|B| = 0$, por lo que no tiene inversa.

Ahora calculamos la inversa de C , por el método de Gauss. Empezamos con la matriz

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

En primer lugar, multiplicamos la fila 3 por -1 e intercambiamos las filas 1 y 3

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por 2

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

y sumamos a la segunda fila, la primera multiplicada por 2

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

intercambiamos las filas 2 y 3

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

multiplicamos la tercera fila por -1

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

sumamos la tercera fila a la primera

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

y ahora restamos la segunda fila a la primera

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

y obtenemos

$$C^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

- 1-13. Dado el sistema $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$ se pide calcular m para que el sistema
- (a) no tenga solución,
 - (b) tenga infinitas soluciones,
 - (c) tenga solución única
 - (d) tenga una solución para la que $x = 3$.

Solución: La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m - 1 \end{array} \right)$$

cuyo rango es el mismo que

$$\text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m - 1 \\ m & -1 & 1 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m - 1 \\ 0 & m^2 - 1 & 1 + m - 2m^2 \end{array} \right)$$

Por tanto, el rango es 2 si $m^2 \neq 1$. Es decir, si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, entonces el sistema es compatible determinado. En este caso, el sistema original es equivalente a

$$\begin{aligned} x - my &= 2m - 1 \\ (m^2 - 1)y &= 1 + m - 2m^2 \end{aligned}$$

y las solución es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 + m - 2m^2}{m^2 - 1} = \frac{-(m-1)(1+2m)}{(m-1)(m+1)} = \frac{-1-2m}{m+1} \\ x &= 2m - 1 + my = 2m - 1 - m \frac{1+2m}{m+1} = \frac{-1}{m+1} \end{aligned}$$

Para que $x = 3$ debe verificarse que

$$3 = \frac{-1}{m+1}$$

es decir $m = -4/3$.

Estudiamos ahora que pasa si $m = 1$. En este caso,

$$\text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m - 1 \\ 0 & m^2 - 1 & 1 + m - 2m^2 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 1 = \text{rg } A$$

y el sistema es compatible indeterminado. El sistema original es equivalente al sistema

$$x - y = 1$$

Y el conjunto de soluciones es $\{1 + y, y\} : y \in \mathbb{R}\}$. Tomando $y = 2$, obtenemos la solución $(3, 2)$.

En el caso en que $m = -1$,

$$\text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m - 1 \\ 0 & m^2 - 1 & 1 + m - 2m^2 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right) = 2 \neq \text{rg } A$$

y el sistema es incompatible.

1-14. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + z = 1 \\ ay + z = 2 \end{cases}$ se pide

- (a) Expresarlo en forma matricial y escribir el vector de incógnitas, el del término independiente y el sistema homogéneo asociado.

Solución: En forma matricial, el sistema queda expresado como $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (b) Discutir y resolver según los valores de a .

Solución: Consideramos la matriz ampliada

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \end{array} \right)$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 2 y 3. Entonces,

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Restando la primera fila, multiplicada por a a la tercera fila obtenemos

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & -a^2 & 1 & 1-a \end{array} \right)$$

Ahora sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por a ,

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+a \end{array} \right)$$

De aquí deducimos que si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3 = \text{número de incógnitas}$, por lo que el sistema es compatible determinado.

En este caso, el sistema original es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ ay + z &= 2 \\ (1+a)z &= 1+a \end{aligned}$$

y obtenemos la solución $z = 1$, $y = 1/a$, $x = 0$.

Si $a = -1$, entonces

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

de donde $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$ que es menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado. Ahora, el sistema original es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ -y + z &= 2 \end{aligned}$$

para obtener las soluciones tomamos z como un parámetro y despejamos $y = z - 2$, $x = 1 + y = z - 1$. Por tanto el conjunto de soluciones es

$$\{(z-1, z-2, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$$

Finalmente, Si $a = 0$, entonces

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

y vemos que $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|B) = 3$, por lo que el sistema es incompatible.

1-15. *Discutir y resolver el sistema siguiente*
$$\begin{cases} x + y + z + 2t - w = 1 \\ -x - 2y + 2w = -2 \\ x + 2z + 4t = 0 \end{cases}$$

Solución: La matriz ampliada $(A|B)$ es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Haciendo operaciones elementales con filas vemos que

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y vemos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$ menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado. Como hay cinco incógnitas obtendremos $5 - 2 = 3$ parámetros. El sistema que tenemos que resolver es equivalente al siguiente sistema,

$$\begin{aligned} x + y + z + 2t - w &= 1 \\ -y + z + 2t + w &= -1 \end{aligned}$$

Elegimos los parámetros z , w , y t y despejamos $y = z + 2t + w + 1$, $x = 1 - y - z - 2t - w = -2z - 4t$. El conjunto de soluciones es

$$\{(-2z - 4t, z + 2t + w + 1, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : z, t, w \in \mathbb{R}\}$$

1-16. *Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + y + z = b \\ 2x + 2y + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

Solución: La matriz ampliada es

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & b \\ 2 & 2 & a + 1 & 0 \end{array} \right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - a & 1 - a & b \\ 0 & 0 & a - 1 & 0 \end{array} \right)$$

Si $a \neq 1$, entonces el sistema es compatible determinado y es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + z &= \frac{b}{1 - a} \\ (a - 1)z &= 0 \end{aligned}$$

La solución es

$$z = 0, \quad y = \frac{b}{1 - a}, \quad x = \frac{-b}{1 - a}$$

Ahora estudiamos el sistema para el valor $a = 1$. Entonces,

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y vemos que, si $b \neq 0$, entonces el sistema es incompatible, porque, es ese caso $\text{rg}(A) = 1$, $\text{rg}(A|B) = 2$.

Por último, si $a = 1$ y $b = 0$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 1$ y el sistema es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetros. En este caso, el sistema original es equivalente al sistema siguiente

$$x + y + z = 0$$

utilizando y, z como parámetros, el conjunto de soluciones es

$$\{(-y - z, y, z) : y, z \in R\}$$

Resumiendo,

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \neq 1, & \text{S.C.D. cuya solución es } z = 0, \quad y = \frac{b}{1-a}, \quad x = \frac{-b}{1-a} \\ a = 1, & \text{Si } \begin{cases} b \neq 0, & \text{S.I.;} \\ b = 0, & \text{S.C.I. cuyas soluciones es el conjunto } \{(-y - z, y, z) : y, z \in R\}. \end{cases} \end{array} \right.$$

1-17. *Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:*

$$\begin{cases} x - 2y + bz = 3 \\ 5x + 2y = 1 \\ ax + z = 2 \end{cases}$$

Solución: La matriz ampliada es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 2a & 1 - ab & 2 - 3a \end{array} \right)$$

Restando a la tercer fila la segunda multiplicada por $a/6$ queda

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{ab}{6} & 2 - \frac{2a}{3} \end{array} \right)$$

De aquí vemos que si $ab \neq 6$, entonces el sistema es compatible determinado y la (única) solución es

$$z = \frac{12 - 4a}{6 - ab}, \quad y = \frac{-7}{6} + \frac{5}{12} \frac{12 - 4a}{6 - ab} b, \quad x = 3 + \frac{12 - 4a}{6 - ab} b - \frac{7}{3} + \frac{5}{6} \frac{12 - 4a}{6 - ab} b$$

En el caso en que $ab = 6$, despejamos $a = 6/b$ (ya que $b \neq 0$) y obtenemos

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2b-4}{b} \end{array} \right)$$

por lo que si $b = 2$ (y por tanto $a = 3$, entonces $\text{rg}(A|B) = \text{rg}(A) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 3 \\ 12y - 10z &= -14 \end{aligned}$$

Tomando a z como parámetro, las soluciones son

$$\left\{ \left(\frac{2-z}{3}, \frac{5z-7}{6}, z \right) : z \in R \right\}$$

Finalmente, si $b \neq 2$, entonces el sistema es incompatible.

1-18. *Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,*

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Solución: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

Por tanto, las soluciones son

$$x = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{16}{4} = 4 \quad y = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2 \quad z = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{20}{4} = 5$$

1-19. Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Solución: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

por lo que la solución es

$$x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{10}{2} = 5 \quad y = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{14}{2} = 7 \quad z = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{2}{2} = 1$$

1-20. Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

Solución: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

y la solución es

$$x = \frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{-36}{-6} = 6 \quad y = \frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{12}{-6} = -2 \quad z = \frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{-6} = \frac{-5}{2}$$

1-21. Dado el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas siguiente,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ax + (a + 3)y + 3z = 1 \end{cases}$$

(a) Estudiar si para algún valor de a el sistema es incompatible.

(b) Para cada valor del parámetro a , para el que el sistema sea compatible, escribir la expresión general de todas sus soluciones.

Solución: El rango de la matriz asociada es

$$\text{rg}(A|B) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ a & a+3 & 3 & 1 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3-a & 3-a & 1-3a \end{array} \right)$$

Vemos que si $a = 3$ el sistema es incompatible porque $\text{rg}(A|B) = 2$, $\text{rg}(A) = 1$. En el caso en que $a \neq 3$ el sistema es compatible indeterminado y equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ (3-a)y + (3-a)z &= 1-3a \end{aligned}$$

y tomando z como parámetro, obtenemos las soluciones

$$\left\{ \left(\frac{7+3a}{3-a} + z, \frac{1-3a}{3-a} - z, z \right) : z \in R \right\}$$

1-22. Dado el sistema homogóneo

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

- (a) Calcular m para que tenga algunas solución distinta a la trivial.
 (b) resolverlo para el valor calculado en el apartado anterior.

Solución: El rango de la matriz asociada al sistema es

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

intercambiamos las dos primeras filas

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 6 & 3m-4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

intercambiamos las dos últimas filas

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 3m-4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3m-46 \end{pmatrix}$$

para que tenga solución distinta de la trivial, el determinante ha de valer cero. Esto ocurre cuando $m = 46/3$. Para este valor de m , el sistema original es equivalente a

$$\begin{aligned} -x + y + \frac{43}{3}z &= 0 \\ y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos las soluciones

$$\{(22z/3, -7z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$