HOJA 5: Integración

1. (*) Calcula las siguentes integrales:

$a)\ \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x}}dx$	$b)\ \int xe^{-2x}dx$	$c)\ \int sen^{14}x\ \cos x\ dx$
$d)\ \int (x+1)(2-x)^{1/3}dx$	$e)\ \int \frac{x^4}{1+x^5}dx$	$f)\ \int (1+\frac{1}{x})^3\frac{1}{x^2}dx$
$g)\ \int sen^3x\ dx$	$h)\ \int xe^{ax^2}\ dx$	$i)\ \int \frac{1}{3+x^2}dx$
$j)\ \int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}}dx$	$k)\ \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx$	$l)\ \int x^4 \ln x\ dx$
$m)\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}$	$n)\ \int (\ln x)^2 dx$	$ñ)\ \int \frac{40x}{(x-1)^{40}}dx$
$o)\ \int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)^3}dx$	$p)\ \int \frac{2x-6}{(x-2)^2}dx$	$q)\ \int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+4x}dx$
$r)\ \int \frac{2x+1}{x^3+6x}dx$	$s)\ \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}-2x+4}dx$	$t)\ \int \frac{x^4}{x^4-1}dx$

Solución:
a) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} - 2x^{-1/2} + C$
b) $xe^{-2x}/2 - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$
c) $(sen^{15}x)/15 + C$
d) $(-3)\frac{3}{4}t^{4/3} + \frac{3}{7}t^{7/3} + C$
e) $\frac{1}{5}\ln(1+x^5) + C$
f) $(1+\frac{1}{x})^4/4 + C$
g) $-\cos x + (\cos^3 x)/3 + C$
h) $\frac{1}{2a}\ \ e^{ax^2} + C$
i) $\frac{\sqrt{3}}{3}arctg(\frac{x\sqrt{3}}{3}) + C$
j) $6[\frac{1}{7}\sqrt[6]{(x-1)^7} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5} + \frac{1}{3}\sqrt[6]{(x-1)^3} - \sqrt[6]{(x-1)} + \arctan\sqrt[6]{x-1}\,] + C$
k) $-\sqrt{16-x^2} + C$
l) $\frac{1}{5}x^5\ln x - \frac{1}{25}x^5 + C$
m) $4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x} - 1) + C$
n) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$
ñ) $40[(\frac{-1}{38})(x-1)^{-38} + (\frac{-1}{39})(x-1)^{-39}) + C$
o) $2(x^2+3x+7)^{-2}\ /(-2) + C$
p) $2\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$
q) $\frac{1}{4}\ln x + \frac{3}{4}\ln(x-2) - \frac{5}{2}(x-2)^{-1} + C$
r) $\frac{-1}{12}\ln(x^2+6) + 2\frac{\sqrt{6}}{6}arctg(\frac{x\sqrt{6}}{6}) + \frac{1}{6}\ln x + C$
s) $arctg(\frac{x-2}{2}) + C$
t) $x + \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2}arctg(x) + C$

2. ¿Cuántos puntos de corte pueden tener dos primitivas diferentes de una misma función?
Solución: ninguno.

3. (*) Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continua, creciente en $(0,1)$, decreciente en $(1,2)$ y, además, cumple que: $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ y $f(2) = 4$. ¿Entre qué valores se puede asegurar que está $\int_0^2 f(x)\ dx$?

Solución: $7 \le \int_0^2 f(x)\ dx \le 10$.

4. (*) Una cierta compañía ha determinado que su coste marginal es $\frac{dC}{dx} = 4(1+12x)^{-1/3}$.

Hallar la función de coste si $C = 100$ cuando $x = 13$.

Solución: $\frac{1}{3}(1+12x)^{2/3}.\frac{3}{2} + 100 - \frac{1}{2}(157)^{2/3}$

5. (*) Sabiendo que el coste marginal de producir x unidades es $x + 5$ y que el coste medio tiene un mínimo en $x = 4$, halla los costes fijos de la empresa.

Solución: $C_f = 8$.

6. (*) Calcula $F'(x)$ en los casos que siguen:

$$a)\ \int_x^{x^3} t\cos t\,dt \quad b)\ \int_1^{x^2} \sqrt{t^4+2t}\ dt \quad c)\ \int_1^{x^2} (t^2-2t+5)\,dt$$

Solución:

$a)\ F'(x) = 3x^5\cos x^3 - x\cos x$

$b)\ F'(x) = \sqrt{x^8+2x^2}\,.2x$

$c)\ F'(x) = 2x^5 - 4x^3 + 10x$

7. Calcula $F'(x)$ en los casos que siguen:

a. $\int_{-x}^{x^2} tg^2 t\,dt$, suponiendo que $x^2 < \frac{\pi}{2}$.

b. $\int_{x^2}^{2x} f^2(2t)\,dt$, suponiendo que f es continua.

Solución:

a. $2xtg^2x^2 + tg^2x$

b. $2f^2(4x) - 2xf^2(2x^2)$

8. (*) ¿Para qué valor de x tiene $F(x) = \int_{-3}^{x} \frac{t^2-4}{3t^2+1}dt$ un máximo local?

Solución: F alcanzará un mínimo local en 2 y un máximo local en -2.

9. Sea $F(x) = \int_{x^2}^{2x} f(t^2)dt$ tal que $f(1) = 1, f(2) = f(4) = 4$ y f es continua. Calcula $F'(1)$.

Solución: $F'(1) = 6$

10. (*) Calcula observando la simetría de las funciones:

$$a)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen^{27}x\cos^{28}x\,dx \quad b)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt[3]{x^5\cos 3x} + \cos\tfrac{x}{3} + \tan^3 x)dx$$

Solución:

a. 0

b. $6sen\frac{\pi}{9}$.

11. Sea f una función de periodo T, tal que $\int_0^T f = b$. Halla $\int_a^{a+nT} f$.

Solución: $\int_a^{a+nT} f = \int_0^{0+nT} f = nb$

12. (*) Halla el área comprendida entre las curvas siguientes:

$$a)\ f(x) = x^2 - 4x + 3,\ g(x) = -x^2 + 2x + 3$$
$$b)\ f(x) = (x-1)^3,\ g(x) = x - 1$$
$$c)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1,\ g(x) = 1 - x^2$$

Solución:

a. 9.

b. $\frac{1}{2}$.

c. $\frac{4}{15}$.

13. (*) Dibuja las gráficas de las funciones $y = 2e^{2x}$ e $y = 2e^{-2x}$. Calcula el área entre dichas gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución: $2(e^2 + e^{-2} - 2)$

14. Sea $f : [1,3] \longrightarrow [2,4]$ creciente, continua y biyectiva, tal que $\int_1^3 f dx = 5$. Calcula $\int_2^4 f^{-1}(x)\, dx$

Solución: 5

15. **a.** Dada $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, convexa y creciente, con valores $f(0) = 0$, $f(2) = \alpha$, $f'(2) = \beta$, $f(4) = 16.$ Estimar, en función de α y β, el valor de $\int_0^2 f(x)dx$.

b. Dada $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, cóncava y creciente, con valores $f(0) = 0$, $f(2) = \alpha$, $f'(2) = \beta$, $f(4) = 2.$ Estimar, en función de α y β, el valor de $\int_0^2 f(x)dx$.

Solución:

a. $2(\alpha + \beta) < \int_0^4 f(x)dx < 2\alpha + 32.$

b. $2\alpha < \int_0^4 f(x)dx < 2(\alpha - \beta) + 32.$

16. Las ventas de un producto vienen dadas por la fórmula $S(t) = 10 + 5sen(\frac{\pi t}{6})$ donde S se mide en miles de unidades y el tiempo t en meses. Calcula las ventas promedio durante el año $(0 \leq t \leq 12)$.

Solución: 10

17. Calcula:

$$a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad b) \int_0^3 \frac{1}{x^3} dx \quad c) \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$
$$d) \int_1^\infty e^{-x} dx \quad e) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad f) \int_{-2}^4 \frac{dx}{x^2}$$

Solución:

a) 2

b) ∞

c) 1

d) 1

e) π

f) ∞

18. Calcula $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

Solución: π