

HOJA 3 : Derivación I

1. Halla los puntos donde las siguientes funciones tienen tangente horizontal.
a) $f(x) = x^3 + 1$ b) $f(x) = 1/x^2$ c) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$
d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ e) $f(x) = e^x - x$ f) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
a) $x=0$; b) nunca; c) $x = \pi + 2k\pi$. d) nunca; e) $x = 0$; f) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
2. (*) Prueba que las rectas tangentes a las gráficas de $y = x$ e $y = 1/x$ en sus puntos de corte son perpendiculares entre sí.
3. ¿En qué punto la tangente a la curva $y^2 = 3x$ es paralela a la recta $y = 2x$?
El punto de la curva es el $(\frac{3}{16}, \frac{3}{4})$.
4. (*) Calcula el punto de corte con el eje OX de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.
El punto de corte es $x = 1/2$.
5. Calcula a para que la tangente a la gráfica de $f(x) = a/x + 1$ en el punto $(1, f(1))$ corte al eje horizontal en $x = 3$.
Luego el punto de corte será $x=3$ cuando $a=1$.
6. (*) Halla la recta tangente y normal a $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$ en $x = 0$.
Ecuación de la recta tangente: $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$; ecuación de la recta normal:
 $y - 0 = -2(x - 0)$.
7. Halla las derivadas de las siguientes funciones
a) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} 3x)\operatorname{sen} 2x$ b) $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2x+6}$
c) $f(x) = 4x^{3/2} \cos 2x$ d) $f(x) = 5x \ln(8x + \operatorname{sen} 2x) + e^{\operatorname{tg} 5x}$
8. (*) Sea $f(x) = 2[\ln(1 + g^2(x))]^2$. Sabiendo que $g(1) = g'(1) = -1$, calcula $f'(1)$.
 $f'(1) = 4 \ln(2)$.
9. (*) Sabiendo que $a^b = e^{b \ln a}$, deriva $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ y $g(x) = (\sqrt{x})^x$.
 $f'(x) = x^{\operatorname{sen} x}(\cos x \cdot \ln x + \operatorname{sen} x/x)$.
 $g'(x) = (\sqrt{x})^x(\ln x + 1)/2$.
10. (*) Sean $f(x) = \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = e^{2x} + e^{3x}$. Calcula $h(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, $h'(0)$ y $v'(0)$.
 $h(x) = \ln(1 + e^{4x} + e^{6x} + 2e^{5x})$, $h'(0) = 4$
 $v(x) = (1 + x^2)^2 + (1 + x^2)^3$, $v'(0) = 0$.
11. Sea $f : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$ continua y biyectiva.
a) Supongamos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(0)$.
b) Supongamos ahora que $f(0) = 1$ y $f'(0) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(1)$.

c) Supongamos ahora que $f(1) = 0$ y $f'(1) = \alpha$, $\alpha \neq 0$. Hallar $(f^{-1})'(0)$.

a) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\alpha}$.

b) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\alpha}$

c) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\alpha}$

12. (*)Suponiendo que las siguientes ecuaciones definen a y como función derivable de x , calcula y' en los puntos que se indican:

a) $x^3 + y^3 = 2xy$ en $(1, 1)$.

b) $\text{sen} x = x(1 + \tan y)$ en $(\pi, 3\pi/4)$.

c) $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4)$, $(0, 5)$ y $(5, 0)$.

a) $y' = -1$. b) $y' = \frac{-1}{2\pi}$. c) no existe derivada en ese punto.

13. Calcula la derivada de las siguientes funciones indicando donde no son derivables.

a) (*) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ b) (*) $g(x) = \begin{cases} 1/|x| & x \leq -2 \\ (x+2)^2 & -2 < x \leq 0 \\ 3 + \text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) & x > 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \text{arctg}^2 x & x \leq 0 \\ \text{sen}^3 x & 0 < x \leq 2\pi \\ \text{sen} x & 2\pi < x \end{cases}$

a) $f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ Obviamente, f no es derivable en 0.

b) $g'(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x < -2 \\ 2(x+2) & -2 < x < 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{2}) & x > 0 \end{cases}$ Obviamente, f no es derivable ni en -2 ni en 0.

c) $h'(x) = \begin{cases} \frac{2\text{arctg}x}{1+x^2} & x \leq 0 \\ 3\text{sen}^2 x \cdot \cos x & 0 \leq x < 2\pi \\ \cos x & 2\pi < x \end{cases}$ Obviamente, f no es derivable en 2π .

14. (*)Halla a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1 \\ ax^2 + bx - 1 & x < 1 \end{cases}$ sea derivable.

f derivable en 1 equivale a $a = -3, b = 9$.

15. Aplica el teorema del valor medio a f en el intervalo indicado y halla los valores c de la tesis del teorema.

a) $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$

b) $f(x) = -2\text{sen} x$ en $[-\pi, \pi]$

c) $f(x) = x^{2/3}$ en $[0, 1]$

d) $f(x) = 2\text{sen} x + \text{sen} 2x$ en $[0, \pi]$

16. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Demuestra que, si $f'(x) \neq 1$ en (a, b) , entonces f tiene un único punto fijo en $[a, b]$.

17. Demuestra que la función f tiene un único punto fijo.

a) $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \cos x$

18. (*) Sea $f(x) = x^3 - 3x + 3$, $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Determinar los extremos globales.

El mínimo se alcanza en -3 y el máximo se alcanza en -1 y en 2 .

19. Sea $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f alcanza el máximo en $x = 2$ y el mínimo en $x = -3$. Sea $g(x) = -f(-x)$. ¿Qué se puede decir del máximo y del mínimo de g ?