Universidad Carlos III de Madrid Septiembre de 2006

Microeconomía II

Nombre: Solución Grupo:

1	2	3	4	5	6	7	Calif.

Dispone de tres horas. La puntuación de cada apartado, sobre un total de 100 puntos, se indica entre paréntesis. Administre su tiempo teniendo en cuenta esta puntuación.

A. Ejercicios

1. Las preferencias de un consumidor sobre los bienes x e y están representadas por la función de utilidad $u(x,y) = x^2y$.

(a) (10 puntos) Calcule sus funciones de demanda ordinaria y su función indirecta de utilidad. Determine si los bienes x e y son bienes inferiores o normales.

Tenemos $RMS(x,y) = \frac{2y}{x}$ *y, por consiguiente, una solución interior satisface el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \frac{2y}{x} &= \frac{p_x}{p_y}, \\ p_x x + p_y y &= I. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x(p_x, p_y, I) &= \frac{2I}{3p_x}, \\ y(p_x, p_y, I) &= \frac{I}{3p_y}. \end{aligned}$$

La función indirecta de utilidad es

$$v(p_x, p_y, I) = \left(\frac{2I}{3p_x}\right)^2 \frac{I}{3p_y}.$$

Como

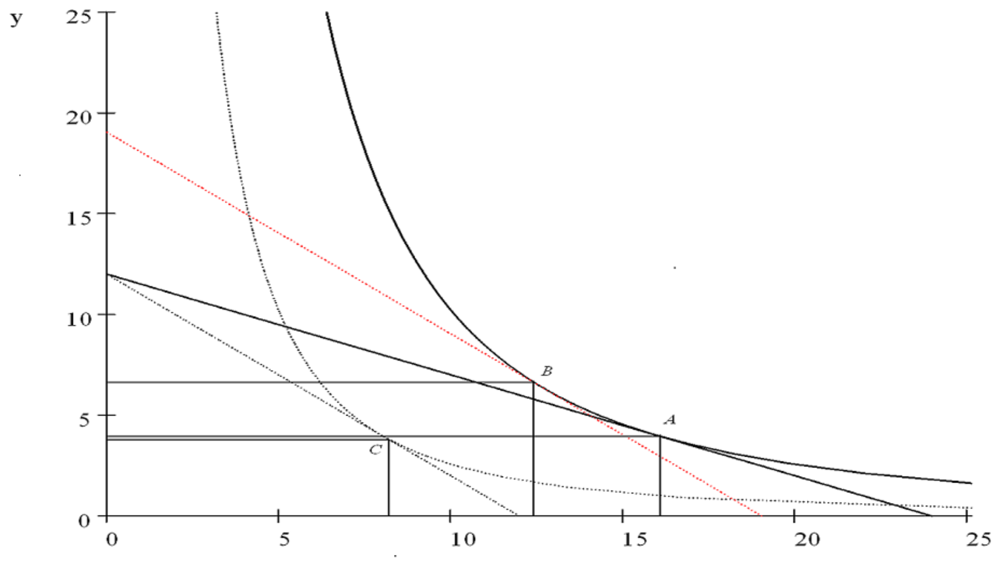
$$\frac{\partial x(p_x, p_y, I)}{\partial I} = \frac{2}{3p_x} > 0$$

y

$$\frac{\partial y(p_x, p_y, I)}{\partial I} = \frac{1}{3p_y} > 0$$

para $p_x, p_y > 0$, *ambos bienes son normales.*

(b) (10 puntos) Represente su conjunto presupuestario y calcule su cesta de bienes óptima para precios $(p_x, p_y) = (10, 20)$ y renta $I = 240$. Calcule los efectos renta y sustitución sobre la demanda del bien x de un aumento del precio a $p'_x = 20$.



Para estos precios y renta la restricción presupuestaria es

$$10x + 20y \leq 240.$$

La cesta de bienes óptima es $x^* = x(10, 20, 240) = 16$, $y^* = y(10, 20, 240) = 4$ *(punto A en el diagrama adjunto). La utilidad del consumidor es* $u^* = v(10, 20, 240) = (16)^2\, 4 = 1024$.

Para calcular el efecto sustitución resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{2y}{x} &= \frac{p'_x}{p_y} \\ x^2 y &= u^*. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de precios y utilidad, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2y}{x} &= 1 \\ 4y^3 &= 1024 \end{aligned}$$

La solución es $(x, y) = (2\sqrt[3]{256}, \sqrt[3]{256}) \simeq (12.699, 6.349\,6)$ *– punto B en el diagrama. El efecto sustitución sobre el bien* x *es por tanto*

$$ES = x_B - x_A = 2\sqrt[3]{256} - 16 \simeq -3.3008.$$

Como a los precios (p'_x, p_y) *la demanda del consumidor es* (x_C, y_C) *– punto C en el diagrama, el efecto total es* $x_C - x_A$

$$ET = x_C - x_A = x(20, 20, 240) - x(10, 20, 240) = 8 - 16 = -8,$$

y el efecto renta es

$$ER = x_C - x_B = ET - ES = -8 - (-3.3008) = -4.6992.$$

2. Las preferencias de un individuo sobre consumo c (medido en euros) y ocio h (medido en horas) están representadas por la función de utilidad $u(h,c) = c + 32\sqrt{h}$ – observe que las preferencias son cuasi-lineales. El individuo dispone de 16 horas para el trabajo y el ocio y de una renta no salarial de $M = 20$ euros.

(a) (10 puntos) Calcule su función de oferta de trabajo. ¿Cuánto consumiría el individuo y cuántas horas trabajaría al salario $\bar{w} = 8$ euros/hora? ¿Y si se establece un impuesto sobre la renta salarial t del 20%?

El problema del consumidor es

$$\begin{array}{l} \max c + 32\sqrt{h} \\ \text{s.a. } c \leq w\,(16-h) + M \\ 0 \leq h \leq 16,\ c \geq 0. \end{array}$$

Como $MRS(h,c) = \frac{du/dh}{du/dc} = \frac{32\frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}}{1} = 16h^{-\frac{1}{2}} = \frac{16}{\sqrt{h}}$, *la solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{rcl} \frac{16}{\sqrt{h}} & = & w \\ c & = & w\,(16-h) + 20 \end{array}$$

De la primera ecuación obtenemos $h(w) = \frac{256}{w^2}$; *pero como para* $w < 4$ *la demanda de ocio es mayor que 16 (el tiempo disponible), tenemos que truncarla. Por tanto, la demanda de ocio es*

$$h(w) = \begin{cases} 16 & \text{si } w < 4 \\ \frac{256}{w^2} & \text{si } w \geq 4 \end{cases},$$

y la oferta de trabajo es

$$l(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 4 \\ 16 - \frac{256}{w^2} & \text{si } w \geq 4 \end{cases}.$$

Para $\bar{w} = 8$, *el individuo trabajaría* $l(\bar{w}) = 16 - \frac{256}{(8)^2} = 12$ *horas y su cesta de bienes sería* $h^* = \frac{256}{8^2} = 4 = 16 - l(\bar{w})$ y $c^* = \bar{w}\,(16 - h^*) + 20 = 8\,(12) + 20 = 116$. *Con un impuesto sobre la renta salarial del 20%, el salario "real" sería* $\bar{w}_t = 8\,(1 - 0,2) = 6,4$, *y el individuo trabajaría* $l(\bar{w}_t) = 16 - \frac{256}{(6.4)^2} = 9,75$ *horas y su cesta de bienes sería* $h_t^* = \frac{256}{(6.4)^2} = 6,25$ *horas de ocio y* $c_t^* = \bar{w}\,(1 - 0,2)\,(16 - h_t^*) + 20 = 6,4\,(9,75) + 20 = 82,4$ *euros de consumo. La cantidad total recaudada con este impuesto es* $(0.2)8(9,75) = 15,6$.

(b) (10 puntos) Suponga ahora que se sustituye el impuesto descrito en el apartado anterior por un impuesto de idéntica cuantía, $T = 15,6$ euros, independiente de la renta salarial. Si el salario sigue siendo $\bar{w} = 8$, ¿cuál sería el efecto sobre el bienestar del individuo y sobre su oferta de trabajo? Identifique el impuesto que menos perjudica al individuo y explique por qué estos impuestos tienen efectos distintos.

Con el nuevo impuesto el problema del consumidor es

$$\begin{gathered} \max c + 32\sqrt{h} \\ \text{s.a. } c \leq w\,(16 - h) + M - T \\ 0 \leq h \leq 16,\; c \geq 0. \end{gathered}$$

La solución se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{16}{\sqrt{h}} &= w \\ c &= w\,(16 - h) + 4,4. \end{aligned}$$

Por tanto, la demanda de ocio y la oferta de trabajo no se ven alteradas,

$$h_T(w) = \begin{cases} 16 & \text{si } w < 4 \\ \frac{256}{w^2} & \text{si } w \geq 4 \end{cases},$$

$$l_T(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 4 \\ 16 - \frac{256}{w^2} & \text{si } w \geq 4, \end{cases}$$

aunque si el consumo. La cesta de bienes del consumidor sería $h_T^* = \frac{256}{8^2} = 4$ *horas de ocio y* $c_T^* = 8\,(16 - h_T^*) + 4,4 = 100,4$ *euros de consumo. La utilidad de esta cesta de bienes para el individuo es*

$$u(h_T^*, c_T^*) = 100,4 + 32\sqrt{4} = 164,4,$$

mientras que la utilidad de la cesta (h_t^*, c_t^*)*,*

$$u(h_t^*, c_t^*) = 82,4 + 32\sqrt{6,25} = 162,4,$$

es menor. Por tanto el individuo prefiere el esquema impositivo del apartado (b). Es fácil comprobar que con dicho esquema impositivo la cesta de bienes (h_t^*, c_t^*) *es también factible. Sin embargo, el consumidor elige consumir más y disfrutar de menos ocio (trabajando más), lo cual resulta en mayor bienestar. La ventaja del impuesto del apartado (b) es no afecta al coste de oportunidad del ocio, que es igual a* w*, y por tanto consigue la misma recaudación sin distosionar la oferta de trabajo (mientras que el impuesto del apartado (a) disminuye el coste de oportunidad del ocio y por eso reduce la oferta de trabajo).*

3. Una empresa precio-aceptante en el mercado de factores produce un bien con una tecnología descrita por la función de producción $F(L,K) = K\sqrt{L}$.

(a) (10 puntos) Determine qué rendimientos a escala tiene la empresa y calcule las funciones de demanda condicional de factores. Suponiendo que el precio del factor capital r es el doble que el del trabajo w, represente la senda de expansión de la empresa (el diagrama que representa la combinaciones óptimas de factores para cada nivel de producción).

La empresa tiene rendimientos crecientes a escala: para $\lambda > 1$, tenemos

$$F(\lambda L, \lambda K) = (\lambda K)\sqrt{\lambda L} = \lambda\sqrt{\lambda}K\sqrt{L} = \lambda\sqrt{\lambda}F(L,K) > \lambda F(L,K).$$

Calculamos la RMST:

$$RMST(L,K) = \frac{\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}}{\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}} = \frac{\frac{K}{2\sqrt{L}}}{\sqrt{L}} = \frac{K}{2L}.$$

Las funciones de demanda condicional de factores son la solución al sistema de ecuaciones

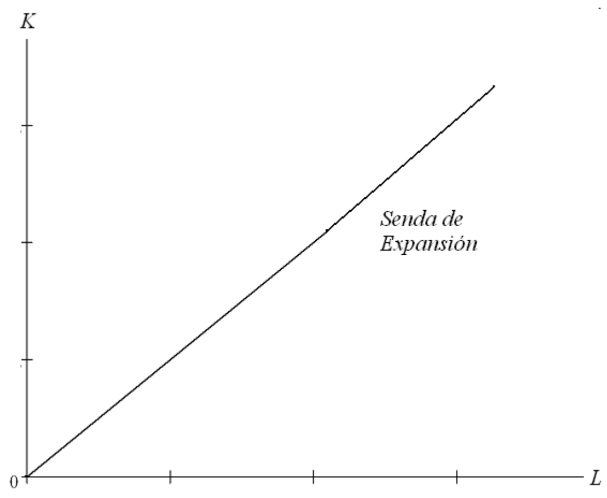
$$\begin{aligned} \frac{K}{2L} &= \frac{w}{r} \\ K\sqrt{L} &= Q. \end{aligned}$$

Resolviendo para L y K obtenemos $L(w,r,Q) = \left(\frac{r}{2w}Q\right)^{2/3}$, $K(w,r,Q) = \frac{2w}{r}\left(\frac{r}{2w}Q\right)^{2/3} = (\frac{2w}{r})^{1/3}Q^{2/3}$.

Para precios $2w = r$, tenemos $w/r = 1/2$. Por tanto la senda de expansión de la empresa viene descrita por la ecuación

$$\frac{K}{2L} = \frac{1}{2},$$

es decir $K = L$, representada en el diagrama adjunto.



(b) (10 puntos) Calcule las funciones de costes totales, medios y marginales y, si es posible, la función de oferta de la empresa para $w = 1$, $r = 2$.

Tenemos

$$L(1, 2, Q) = Q^{2/3}$$

y

$$K(1, 2, Q) = Q^{2/3}.$$

La función de costes totales es

$$C(Q) = L(1, 2, Q) + 2K(1, 2, Q) = 3Q^{2/3}.$$

Las funciones de costes medios y marginales son

$$CMe(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = 3Q^{-1/3},$$

y

$$CM(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ} = 2Q^{-1/3}.$$

Como la empresa tiene economías de escala, la función de oferta no está definida – para un precio dado del producto, el problema de maximización de beneficios no tiene solución.

4. En un mercado competitivo hay tres empresas cuyas funciones de costes totales son $C_1(q) = 5q^2 + 10q + 20$, $C_2(q) = 2q^2 + 6q + 32$ y $C_3(q) = 3q^2 + 6q + 12$, respectivamente. Se sabe que el nivel de producción de la empresa 1 es el que minimiza su coste medio.

(a) (7,5 puntos) Determine el precio, la producción y beneficio de cada empresa en este mercado.

Tenemos $CMe_1(q) = 5q + 10 + 20/q$; *por tanto, la empresa 1 produce* $q_1 = q$ *tal que*

$$\frac{dCMe_1(q)}{dq} = 5 - \frac{20}{q^2} = 0;$$

es decir $q_1 = 2$. *Como además la empresa 1 es competitiva,* $(q_1, p) = (2, p)$ *está en su curva de oferta, que obtenemos de la ecuación* $CM_1(q_1) = p$. *Por tanto, la oferta de la empresa 1 es*

$$S_1(p) = \begin{cases} \frac{1}{10}(p-10) & \text{si } p \geq 10 \\ 0 & \text{si } p < 10 \end{cases},$$

Al precio de mercado p tenemos $S_1(p) = 2$; *es decir,*

$$\frac{1}{10}(p-10) = 2.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $p = 30$. *El beneficio de la empresa es*

$$\pi_1 = 30\,(2) - \left(5\,(2)^2 + 10\,(2) + 20\right) = 0$$

Puesto que las empresas 2 y 3 también son competitivas, podemos obtener sus funciones de oferta a partir de las ecuaciones $CM_2(q_2) = p$ *y* $CM_3(q_3) = p$; *es decir,* $4q_2 + 6 = p$ *y* $6q_3 + 6 = p$. *Por tanto, las ofertas de estas empresas son*

$$S_2(p) = \begin{cases} \frac{1}{4}(p-6) & \text{si } p \geq 6 \\ 0 & \text{si } p < 6 \end{cases},$$

$$S_2(p) = \begin{cases} \frac{1}{6}(p-6) & \text{si } p \geq 6 \\ 0 & \text{si } p < 6 \end{cases},$$

Y las cantidades ofertadas en equilibrio son: $S_2(30) = 6$ *y* $S_3(30) = 4$. *Los beneficios de estas empresas son*

$$\pi_2 = 30\,(6) - \left(2\,(6)^2 + 6\,(6) + 32\right) = 40$$

y

$$\pi_3 = 30\,(4) - \left(3\,(4)^2 + 6\,(4) + 12\right) = 36.$$

(b) (7,5 puntos) Calcule la función de oferta de cada empresa y el equilibrio de mercado a largo plazo suponiendo que hay libre entrada y que las tres tecnologías disponibles pueden adoptarse libremente.

Las funciones de oferta son la calculadas en el apartado (a). A largo plazo todas las empresas obtienen beneficio cero y producen a un coste medio mínimo. Las funciones de coste medio de las empresas 2 y 3 son

$$\begin{aligned} CMe_2(q) &= 2q + 6 + \frac{32}{q} \\ CMe_3(q) &= 3q + 6 + \frac{12}{q} \end{aligned}$$

Los costes medios mínimos se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2 - \frac{32}{q_2^2} &= 0 \\ 3 - \frac{12}{q_3^2} &= 0. \end{aligned}$$

cuya solución es $q_2^2 = 4, q_3^2 = 2$. *Por tanto, los costes medios mínimos de estas empresas:* $CMe_2^* = 22$, *y* $CMe_3^* = 18$. *Como* $CMe_1^* = 30$, *a largo plazo el precio de mercado es* $p^* = 18$ *y sólo empresas con la tecnología de la empresa 3 y que producen dos unidades permanecen en el mercado. El número de estas empresas en el mercado es el necesario para servir la demanda al precio* $p^* = 18$, *que viene dado por la expresión* $D(18)/2$.

5. Una empresa cuya función de costes totales es $C(q) = 8q$ abastece a dos mercados cuyas funciones de demanda son $D_1(p) = \max\{20 - p, 0\}$ y $D_2(p) = \max\{80 - 2p, 0\}$.

(a) (10 puntos) Calcule el equilibrio de monopolio con discriminación de precios de tercer grado – es decir, suponiendo que la empresa puede cargar precios distintos en cada mercado. Calcule los beneficios de la empresa y los excedentes de los consumidores.

Como el monopolista tiene rendimientos a escala constantes (el coste marginal es constante), con discriminación de precios de tercer grado el monopolista maximiza beneficios vendiendo en cada mercado una cantidad tal que el ingreso marginal coincida con el coste marginal. Los ingresos totales del monopolista en cada mercado son $I_1(q_1) = (20 - q_1)\, q_1$ *(para* $q_1 \leq 20$*) y* $I_2(q_2) = (40 - q_2/2)\, q_2$ *(para* $q_1 \leq 20$*), respectivamente. Derivando estas funciones respecto al producto e igualando al coste marginal obtenemos el al sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} 20 - 2q_1 &= 8 \\ 40 - q_2 &= 8. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $q_1^* = 6$, $q_2^* = 32$. *Los precios que carga el monopolista en cada mercado se obtienen a partir de las funciones de demanda:* $p_1^* = 20 - q_1^* = 14$, *y* $p_2^* = 40 - q_2^*/2 = 24$.

Los beneficios del monopolista son $\pi(q_1^*, q_2^*) = p_1^* q_1^* + p_2^* q_2^* - 8\,(q_2^* + q_2^*) = 14\,(6) + 24\,(32) - 8\,(6 + 32) = 548$. *Y los excedentes de los consumidores en los mercados 1 y 2 son* $EC_1(q_1^*) = \frac{1}{2}\,(20 - p_1^*)\, q_1^* = \frac{1}{2}\,(20 - 14)\, 6 = 18$, *y* $EC_2(q_2^*) = \frac{1}{2}\,(40 - p_2^*)\, q_2^* = \frac{1}{2}\,(40 - 24)\, 32. = 256$, *respectivemante.*

(b) (5 puntos) Calcule el equilibrio de monopolio sin discriminación de precios y determine quienes ganan o pierden (empresa, consumidores de uno y otro mercado) respecto a la situación en (a). Pista: calcule el beneficio del monopolista $\pi(p)$ para $p \leq 20$ y compruebe que π es creciente.

Si el monopolista carga un precio $p \leq 20$, *entonces la demanda en ambos mercados es positiva, y la demanda total es* $D(p) = (20 - p) + (80 - 2p) = 100 - 3p$. *El beneficio es* $\pi(p) = (100 - 3p)\, p - 8\,(100 - 3p)$. *Si derivamos obtenemos* $\pi'(p) = 124 - 6p > 0$ *para* $p \leq 20$. *Por tanto, el monopolista querría incrementar el precio al menos hasta* $p = 20$. *Pero una vez que el precio es mayor que 20 (*$p \geq 20$*), la demanda es positiva sólo en el mercado 2. Por tanto, el monopolista maximiza beneficios ignorando el mercado 1 y produciendo la cantidad óptima para el mercado 2,* $q_2^* = 32$, *al precio* $p_2^* = 24$.

El nuevo equilibrio implica unos beneficios menores para el monopolista, que sólo obtiene ingresos en el mercado 2, menor excedente de los consumidores del mercado 1, que se reduce a cero, e idéntico excedente para los consumidores del mercado 2.

B. Preguntas Cortas

6. (5 puntos) Las preferencias de un pensionista por alimentos (x) y vestido (y) están representadas por la función de utilidad $u(x, y) = xy$. A los precios actuales, $p_x = 2$, $p_y = 4$, el individuo consume la cesta $(100, 100)$. En 2005 los precios han crecido en un 10% y un 5%, respectivamente. ¿En qué porcentaje se incrementaría su pensión si el gobierno aplica un incremento igual al IPC tomando como referencia su cesta de bienes (es decir, el habitual índice de Laspeyres)? ¿En qué porcentaje se incrementaría si se aplicara su "verdadero" IPC?

El IPC que nos proporciona el índice de Laspeyres es

$$IPC_L = \frac{2,2 \times 100 + 4,2 \times 100}{2 \times 100 + 4 \times 100} = 1.0667.$$

Es decir, de acuerdo con este índice hay que incrementar la pensión del individuo en un 6,67%.

La renta necesaria para mantener el bienestar del individuo a los nuevos precios es el gasto necesario para adquirir la cesta de bienes que resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} xy &= 10^4 \\ \frac{y}{x} &= \frac{2.2}{4.2}. \end{aligned}$$

Por tanto $x = 138,17$, $y = 72,375$. *El verdadero IPC del individuo es*

$$IPC_v = \frac{2,2 \times 138,17 + 4,2 \times 72,375}{2 \times 100 + 4 \times 100} = 1.0132.$$

Es decir, de acuerdo con el verdadero IPC de este individuo hay que incrementar su pensión en un 1,32%.

7. (5 puntos) Una empresa precio-aceptante en todos los mercados tiene una función de costes totales (costes fijos más costes variables) convexa. Muestre que en este caso el excedente del productor (el área comprendida entre el precio de mercado y la curva de oferta de la empresa) es igual a su ingreso total menos el coste variable.

La función de oferta de una empresa se obtiene resolviendo para q la ecuación

$$p = C'(q).$$

Por tanto, la función de oferta de la empresa coincide con la inversa de su función de costes marginales. Como el excedente del productor es el área comprendida entre la oferta de la empresa y el precio de mercado p, este puede obtenerse restando al ingreso total (pq) la integral de la curva de costes marginales entre 0 y q. Ahora bien, como

$$C(q) = \int_0^q C'(q) + CF,$$

la integral entre 0 *y q de* $C'(q)$ *es igual al coste variable de la empresa. Por consiguiente, el excedente del productor no es más que la diferencia entre el ingreso total y el coste variable.*