Universidad Carlos III de Madrid Septiembre de 2009

Microeconomía II

Nombre: Grupo:

1	2	3	4	5	Calif.

Dispone de 2 horas y 45 minutos. La puntuación de cada apartado, sobre un total de 100 puntos, se indica entre paréntesis. Administre su tiempo teniendo en cuenta esta puntuación.

1. Las preferencias de un consumidor sobre los bienes x (libros de terror) e y (películas) están representadas por la función de utilidad $u(x,y) = \ln x + y$.

(a) (10 puntos) Calcule sus funciones de demanda ordinarias, $x(p_x, p_y, I)$ e $y(p_x, p_y, I)$.

Tenemos:

$$RMS(x,y) = \frac{1}{x}.$$

Solución interior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y &= I \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{p_y}{p_x} \\ y^* &= \frac{I}{p_y} - 1. \end{aligned}$$

Para que esta solución sea factible necesitamos que $\frac{I}{p_y} - 1 > 0$; es decir, $I > p_y$. *Cuando* $I \leq p_y$, *tenemos una solución de esquina:* $x^* = \frac{I}{p_x}$, $y^* = 0$.

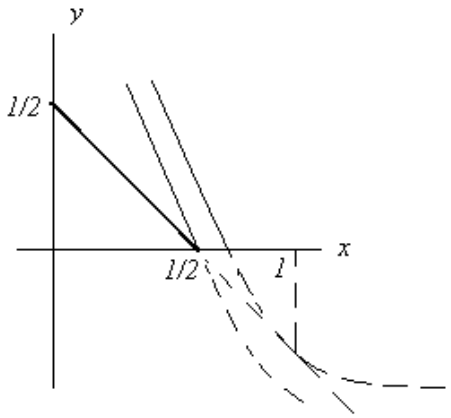
Por tanto, las funciones de demanda son:

$$\begin{aligned} x(p_x, p_y, I) &= \begin{cases} \frac{p_y}{p_x} & \text{si } I > p_y \\ \frac{I}{p_x} & \text{si } I \leq p_y \end{cases} \\ y(p_x, p_y, I) &= \begin{cases} \frac{I}{p_y} - 1 & \text{si } I > p_y \\ 0 & \text{si } I \leq p_y. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) (5 puntos) De un ejemplo (si se quiere dando valores a p_x, p_y, I) en el que la solución del problema del consumidor es "de esquina".

Para $I = 5,\ p_x = p_y = 10$, *la solución es de esquina:*

$$\begin{aligned} x^* &= x\,(10, 10, 5) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \\ y^* &= y\,(10, 10, 5) = 0. \end{aligned}$$



(c) (10 puntos) Calcule la cesta óptima de bienes (x^*, y^*) si $p_x = 1$, $p_y = 1$ y $I = 10$. Debido a la publicación de un gran best seller de terror, p_x se duplica. Calcule los efectos renta y sustitución del aumento de p_x sobre la demanda de libros de terror (x). (Recuerde que $\ln 1 = 0$).

Tenemos $x^* = x\,(1, 1, 10) = 1$ *e* $y^* = y\,(1, 1, 10) = 9$. *El nivel de utilidad del es*

$$u(1, 9) = \ln 1 + 9 = 9.$$

Para calcular el efecto sustitución sobre la demanda de alimentos resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} \ln x + y &= 9 \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

cuya solución es $x_B = \frac{1}{2}$. *El efecto sustitución es*

$$ES = x_B - x^* = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Puesto que la función de utilidad es "cuasi-lineal", el efecto renta es nulo. Esto es fácil de comprobar:

$$ET = x(2, 1, 10) - x\,(1, 1, 10) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = ES.$$

Por tanto,

$$ER = ET - ES = 0.$$

2. La función de producción de una empresa papelera es $Q = F(M, K) = 6MK$, donde Q es la cantidad de papel producida anualmente, K es la cantidad de capital (en horas) y M la cantidad de un producto químico (en litros) que utiliza. El precio de este producto es 6 euros por litro y el coste de uso del capital es 30 euros por hora.

(a) (15 puntos) Determine el ratio óptimo M/K entre el producto químico y el capital y calcule las funciones de costes totales, medios y marginales de la empresa.

La relación marginal de sustitución técnica es

$$RMST(M, K) = \frac{K}{M}.$$

Si el precio del producto químico es q y el coste de uso del capital es $r = 30$, el ratio óptimo M/K viene dado por la ecuación:

$$RMST(L, K) = \frac{K}{M} = \frac{q}{30};$$

es decir, $(M/K)^* = 30/q$. Para $q = 6$, $(M/K)^* = 5$.

Obtenemos las funciones de demanda condicional de factores resolviendo el sistema

$$\begin{array}{rcl} \frac{K}{M} & = & \frac{q}{30} \\ 6MK & = & Q. \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} M(q, Q) & = & \sqrt{\frac{5}{q}Q} \\ K(q, Q) & = & \frac{q}{30}\sqrt{\frac{5}{q}Q} = \sqrt{\frac{q}{180}Q}. \end{array}$$

Para $q = 6$, tenemos $M^* = M(6, Q) = \sqrt{\frac{5Q}{6}}$ y $K^* = K(6, Q) = \sqrt{\frac{Q}{30}}$. La función de costes totales es

$$C(Q) = 6\sqrt{\frac{5Q}{6}} + 30\sqrt{\frac{Q}{30}} = \sqrt{120Q}$$

y las funciones de costes marginales y medios son, respectivamente,

$$CMa(Q) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{120}{Q}}$$

y

$$CMe(Q) = \sqrt{\frac{120}{Q}}.$$

(b) (15 puntos) El uso del producto químico genera residuos que se vierten en un río junto a la planta de producción. Estos vertidos han resultado ser altamente contaminantes, por lo que la Agencia Protectora del Medio Ambiente introduce un impuesto de 9 euros por cada litro del producto químico utilizado en la producción. Suponiendo que el objetivo de la empresa es mantener el mismo nivel de producción que había en ausencia de tal regulación, calcule el nuevo ratio óptimo M/K que utilizará. ¿Cuánto pagará la empresa en concepto de impuestos? ¿Qué efecto tiene esta regulación medio-ambiental sobre los costes de la empresa?

Con el impuesto, el precio del producto químico aumenta a $\hat{q} = 6 + 9 = 15$. *Por tanto*

$$\hat{M}^* = M(15, Q) = \sqrt{\frac{5}{15}Q} = \sqrt{\frac{Q}{3}}$$

y

$$\hat{K}^* = K(15, Q) = \sqrt{\frac{15}{180}Q} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{3}}.$$

La función de costes totales es

$$\hat{C}(Q) = 15\sqrt{\frac{Q}{3}} + 30\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{3}} = 30\sqrt{\frac{Q}{3}}.$$

Si mantiene su producción la empresa pagará en impuestos

$$I = 9M(15, Q) = 9\sqrt{\frac{Q}{3}}.$$

Por supuesto, el impuesto encarece la producción del bien y reduce el uso del producto químico en

$$M^* - \hat{M}^* = \sqrt{\frac{5}{6}Q} - \sqrt{\frac{Q}{3}} > 0.$$

3. Un mercado es abastecido por una sola empresa. El mercado puede separarse en 2 segmentos cuyas funciones de demanda son $D_1(p_1) = \max\{32 - \frac{4p_1}{10}; 0\}$ y $D_2(p_2) = \max\{18 - \frac{p_2}{10}; 0\}$. La función de costes totales de la empresa es $C(Q) = 40Q$.

(a) (15 puntos) ¿Cuánto venderá el monopolista en cada segmento y a qué precio?

Calculamos las funciones inversas de demanda:

$$\begin{aligned} 32 - \frac{4}{10}p_1 &= Q_1 \\ 18 - \frac{1}{10}p_2 &= Q_2. \end{aligned}$$

Resolviendo para p_1 y p_2 obtenemos

$$P_1(Q_1) = \max\{80 - \frac{5}{2}Q_1, 0\}$$

y

$$P_2(Q_2) = \{180 - 10Q_2, 0\}.$$

Las funciones de ingreso para los dos mercados:

$$I_1(Q_1) = \max\{\left(80 - \frac{5}{2}Q_1\right)Q_1, 0\},$$

y

$$I_2(Q_2) = \max\{(180 - 10Q_2)Q_2, 0\}.$$

Si el problema del monopolista tiene una solución interior ($Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$), entonces la encontramos resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} I_1'(Q_1) &= C'(Q_1 + Q_2) \\ I_2'(Q_2) &= C'(Q_1 + Q_2). \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 80 - 5Q_1 &= 40 \\ 180 - 20Q_2 &= 40. \end{aligned}$$

Por tanto, $Q_1^{MD} = 8$, $P_1^{MD} = 60$ y $Q_2^{MD} = 7$, $P_2^{MD} = 110$. El beneficio del monopolista es

$$\Pi = 60(8) + 110(7) - 40(8 + 7) = 650.$$

(b) (10 puntos) Si no fuera posible discriminar precios, ¿cuánto venderá el monopolista y a qué precio? Represente gráficamente la solución del problema del monopolista en ausencia de discriminación de precios.

Calculamos la función de demanda de mercadó:

$$D(p) = D_1(p_1) + D_2(p_2) = \begin{cases} 50 - \frac{p}{2} & \text{si } p \leq 80 \\ 18 - \frac{p}{10} & \text{si } 80 < p \leq 180 \\ 0 & \text{si } p > 180 \end{cases}$$

La función de demanda inversa es

$$P(Q) = \begin{cases} 180 - 10Q & \text{si } Q \leq 10 \\ 100 - 2Q & \text{si } 10 < Q \leq 50 \\ 0 & \text{si } Q > 50 \end{cases}$$

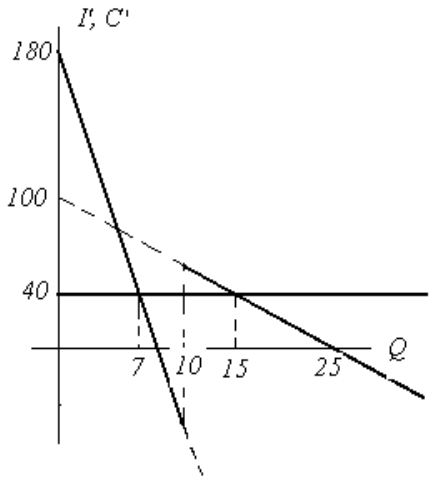
La función de ingreso del monopolio es $I(Q) = P(Q)Q$ *y, por tanto, su ingreso marginal es*

$$I'(Q) = \begin{cases} 180 - 20Q & \text{si } Q \leq 10 \\ 100 - 4Q & \text{si } 10 < Q \leq 50 \\ 0 & \text{si } Q > 50 \end{cases}$$

Para encontrar la solución al problema del monopolio resolvemos la ecuación:

$$I'(Q) = C'(Q).$$

Para $Q \leq 10$ *tenemos* $180 - 20Q = 40$; *es decir,* $\hat{Q} = 7$, $P(\hat{Q}) = 180 - 10\,(7) = 110$, *y* $\Pi(\hat{Q}) = (110 - 40)\,7 = 490$. *Para* $10 < Q \leq 50$, *tenemos* $100 - 4Q = 40$; *es decir,* $\tilde{Q} = 15$, $P(\tilde{Q}) = 100 - 2\,(15) = 70$, *y* $\Pi(\tilde{Q}) = (70 - 40)\,15 = 450$. *Por tanto, el equilibrio de monopolio es* $Q^M = 7$ *y* $P^M = 110$.



Es interesante observar que en este ejemplo impedir la discriminación de precios elimina completamente el mercado 1 y, por tanto, perjudica a los consumidores de este mercado, además de al monopolio que ve reducidos sus beneficios de 650 a 490. Además,no beneficia (ni perjudica) a los consumidores del mercado 2.

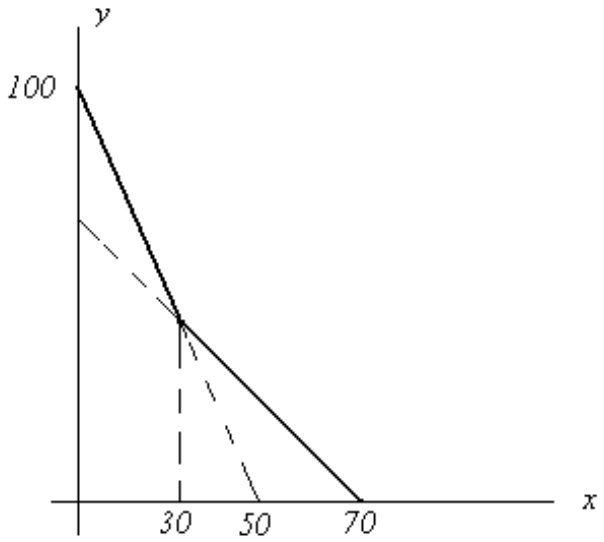
4. (10 puntos) Un consumidor adquiere los bienes x e y en una tienda de su barrio a los precios $p_x = 2$ y $p_y = 1$. Dicha tienda ofrece además un descuento del 50% en el precio del bien x si se compra 30 o más unidades. Si el consumidor dispone de 100 euros de renta para gastar en estos dos bienes, dibuje su conjunto presupuestario teniendo en cuenta esta oferta.

La restricción presupuestaria es:

(a) $x \leq 30$*:* $2x + y \leq 100$.

(b)$x \leq 30$*:* $2(30) + 1(x - 30) + y \leq 100$. *(Equivalentemente,* $x + y \leq 70$.)

Gráficamente:



5. (10 puntos) La demanda de mercado del bien x tiene una elasticidad constante e igual a 2. El mercado está monopolizado por una empresa que produce x utilizando trabajo como único factor de acuerdo con la función de producción $x = f(L) = 3L$. El salario es $w = 5$ euros. Si a la empresa se le impone la obligación de pagar 2 euros adicionales por trabajador en concepto de cotizaciones a la seguridad social, ¿cuál será la variación porcentual en el precio del bien x? (Pista: use el Índice de Lerner.)

En el equilibrio de monopolio (P^M, Q^M) *el Indice de Lerner es igual a la inversa de la elasticidad de la demanda, es decir,*

$$\frac{P^M - CM_a(Q^M)}{P^M} = \frac{1}{\varepsilon_D(Q^M)},$$

que podemos escribir como

$$P^M = \alpha CM_a(Q^M).$$

donde

$$\alpha = \frac{\varepsilon_D(Q^M)}{\varepsilon_D(Q^M) - 1}.$$

es una constante porque la elasticidad de la demanda es constante. A partir de esta fórmula es fácil ver que un aumento porcentual del coste marginal induce un aumento porcentual idéntico en el precio:

$$\frac{P_1^M - P_0^M}{P_0^M} = \frac{\alpha CM_a(Q_1^M) - \alpha CM_a(Q_0^M)}{\alpha CM_a(Q_0^M)} = \frac{CM_a(Q_1^M) - CM_a(Q_0^M)}{CM_a(Q_0^M)},$$

Puesto que la empresa tiene rendimientos constante a escala, un aumento de salario produce un incremento del coste marginal y del precio de monopolio en idéntico porcentaje.

Comprobémoslo numéricamente. En nuestro ejemplo tenemos $CM_a(Q) = \frac{w}{3}$, *y como la elasticidad de demanda es* $\varepsilon_D(Q^M) = 2$, *tenemos* $\alpha = 2$. *Por consiguiente para un salario* $w = 5$, *el precio de monopolio es* $P^M = 10/3$. *Si el salario aumenta un 40%, hasta* $\hat{w} = 7$, *entonces el precio de monopolio aumenta a* $\hat{P}^M = 14/3$, *también un 40%.*