Teoría de la Empresa

La Tecnología de Producción

La Empresa

El concepto de empresa y el papel que desempeñan las empresas
en una la economía son extraordinariamente complejos.

En esta introducción a la teoría de la empresa nos limitaremos
considerar a la empresa como un agente económico cuya actividad
consiste en transformar bienes: es decir, en producir ciertos bienes
(outputs) utilizando para ello otros bienes (inputs), que se consumen en
el proceso.

La empresa queda completamente caracterizada por su *tecnología*.

La Tecnología de Producción

Una tecnología de producción puede describirse como conjunto de actividades posibles *Y*, un subconjunto de $\Re^l$, siendo *l* el número de bienes existentes.

Un plan de producción $y \in Y$ especifica los outputs (las coordenadas positivas) e inputs (las coordenada negativas) que se generan y utilizan en la actividad.

Ejemplo: Supongamos que $l = 5$. Si *Y* contiene el plan de producción

$$y = (-5, 2, -6, 3, 0)$$

esto significa que la empresa puede producir 2 unidades del bien 2 y 3 unidades del bien 4 usando 5 unidades del bien 1 y 6 unidades del bien 3 como inputs. En este plan de producción el bien 5 ni aparece ni como input ni como output.

La Tecnología de Producción

Para simplificar el problema, supondremos que la empresa produce un sólo output (Q) utilizando dos inputs (L y K).

En este contexto, la tecnología de una empresa se puede describir mediante una función de producción, $F(L,K)$, que nos indica la cantidad máxima Q de output que se puede producir para cada vector de inputs $(L,K) \geq (0,0)$.

El conjunto de posibilidades de producción se define como

$$Y = \{(Q,-L,-K) \in \Re^3 \ / \ \ Q \leq F(L, K)\}.$$

La ecuación $Q = F(L,K)$ describe la frontera de posibilidades de producción.

Función de Producción

$$\boldsymbol{Q = F(L,K)}$$

Q = producción

L = trabajo

K = capital

$F_L = \partial F / \partial L > 0$ (producto marginal del trabajo)

$F_K = \partial F / \partial K > 0$ (producto marginal del capital)

Ejemplo: Función de Producción

Cantidad de capital	Cantidad de trabajo 1	2	3	4	5
1	20	40	$\boxed{55}$	65	75
2	40	60	75	85	90
3	$\boxed{55}$	75	90	100	105
4	65	85	100	110	115
5	75	90	105	115	120

Isocuantas

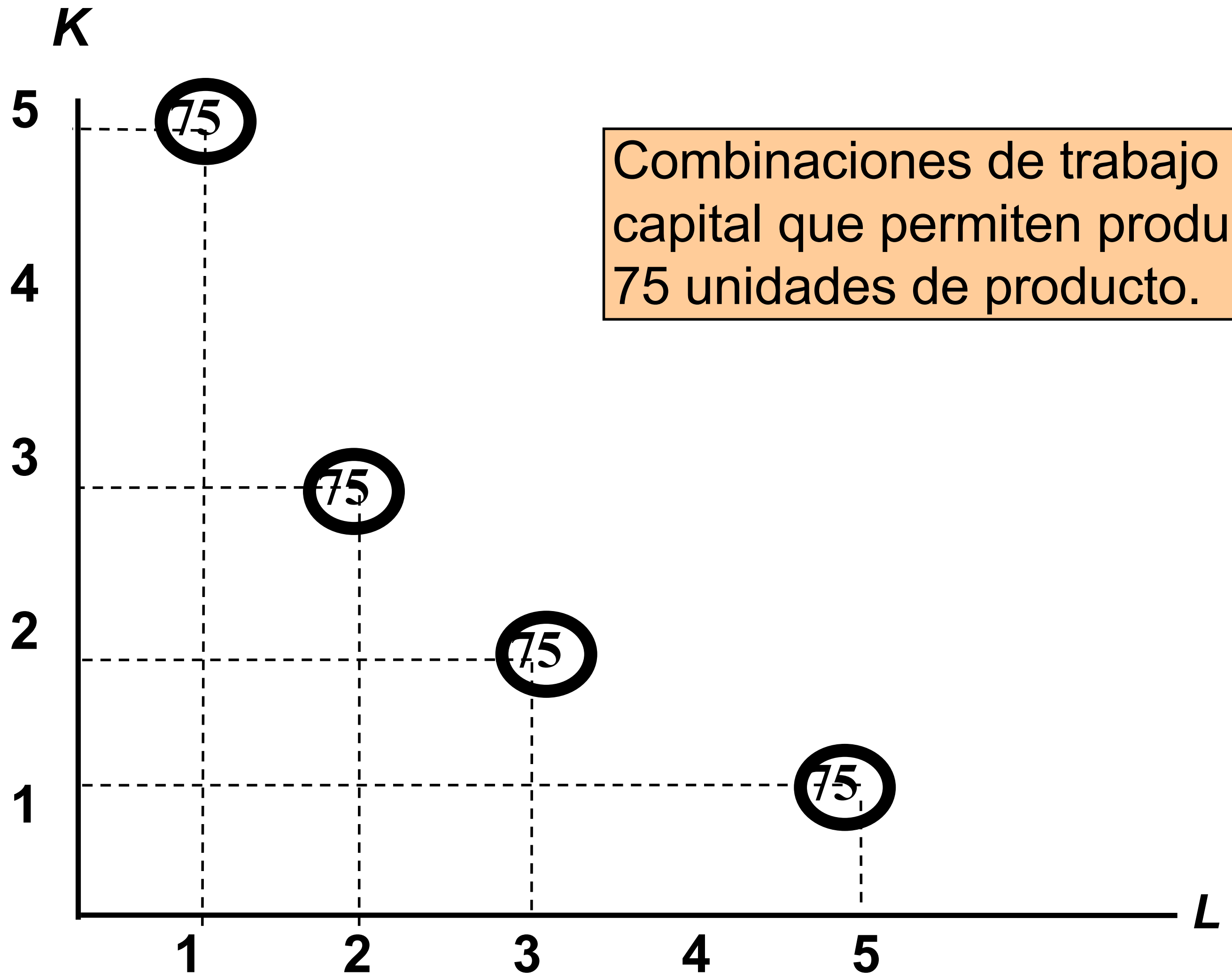
La curvas de nivel (que llamaremos isocuantas) de la función de producción describen las combinaciones de factores que permiten obtener un mismo nivel de producto.

La isocuantas muestran las posibilidades de sustitución de factores la producción, y muestran la posibilidad de utilizar *tecnologías*

- intensivas en trabajo

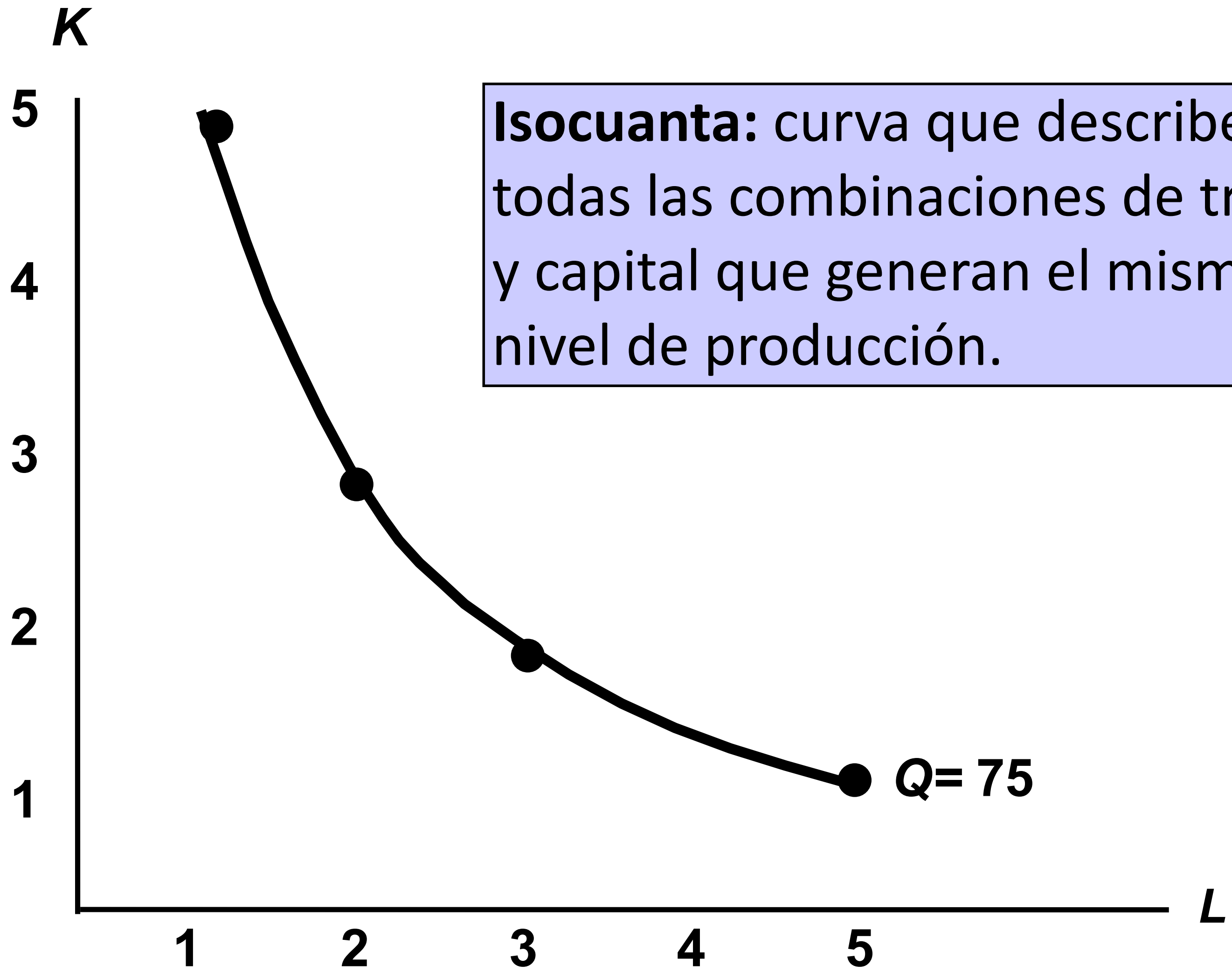
- intensivas en capital.

Isocuantas



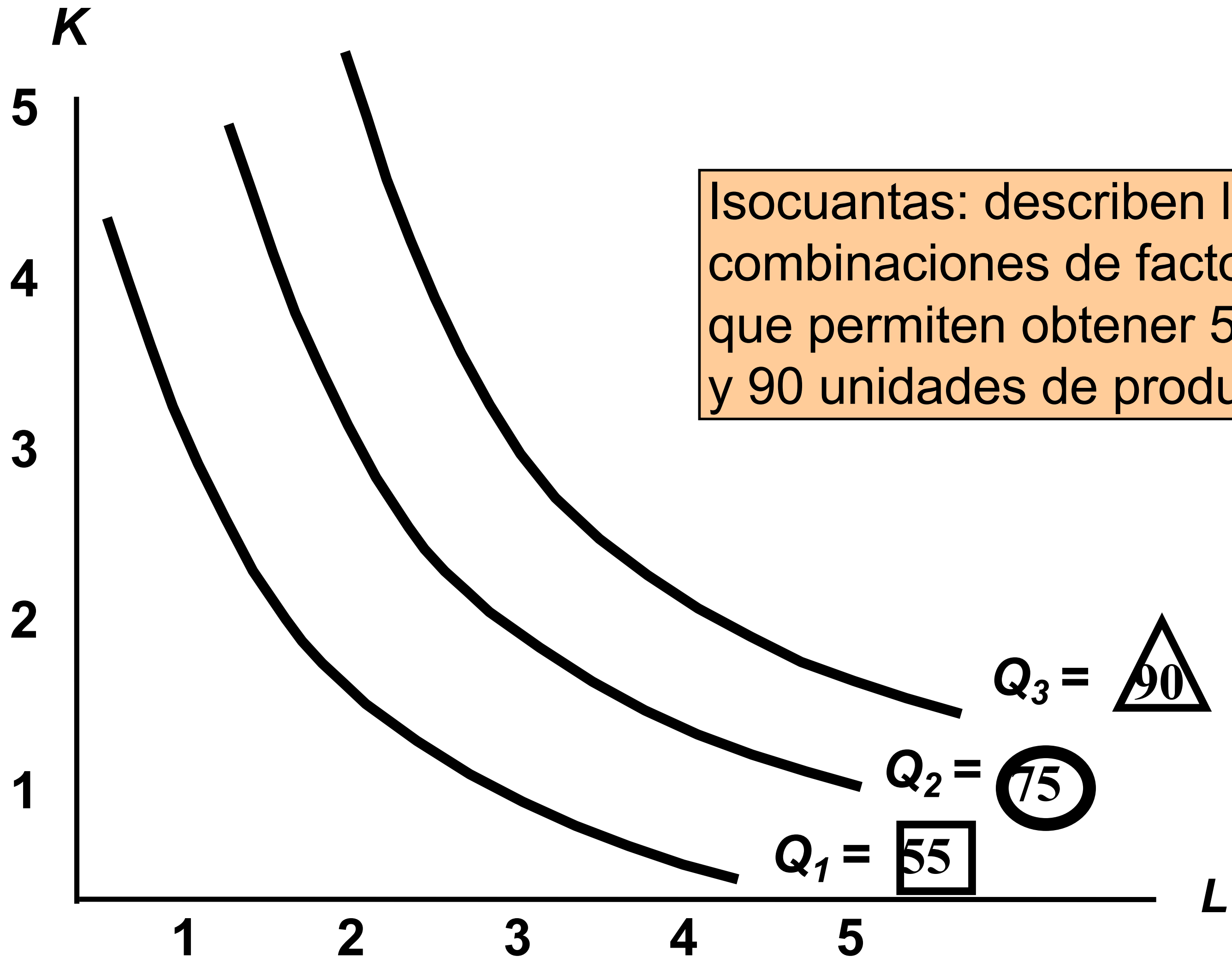
Combinaciones de trabajo y capital que permiten producir 75 unidades de producto.

Isocuantas



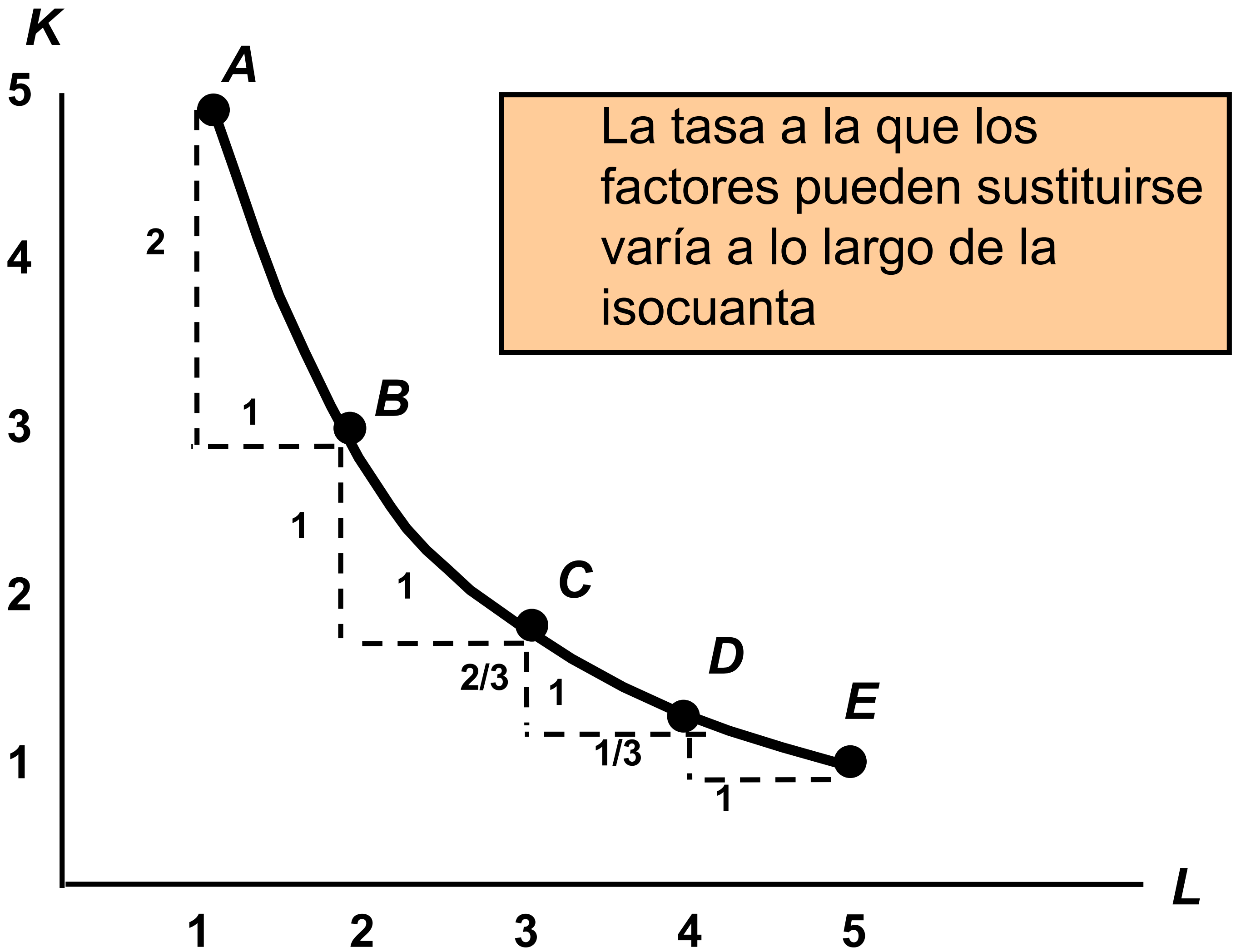
Isocuanta: curva que describe todas las combinaciones de trabajo y capital que generan el mismo nivel de producción.

Mapas de Isocuantas

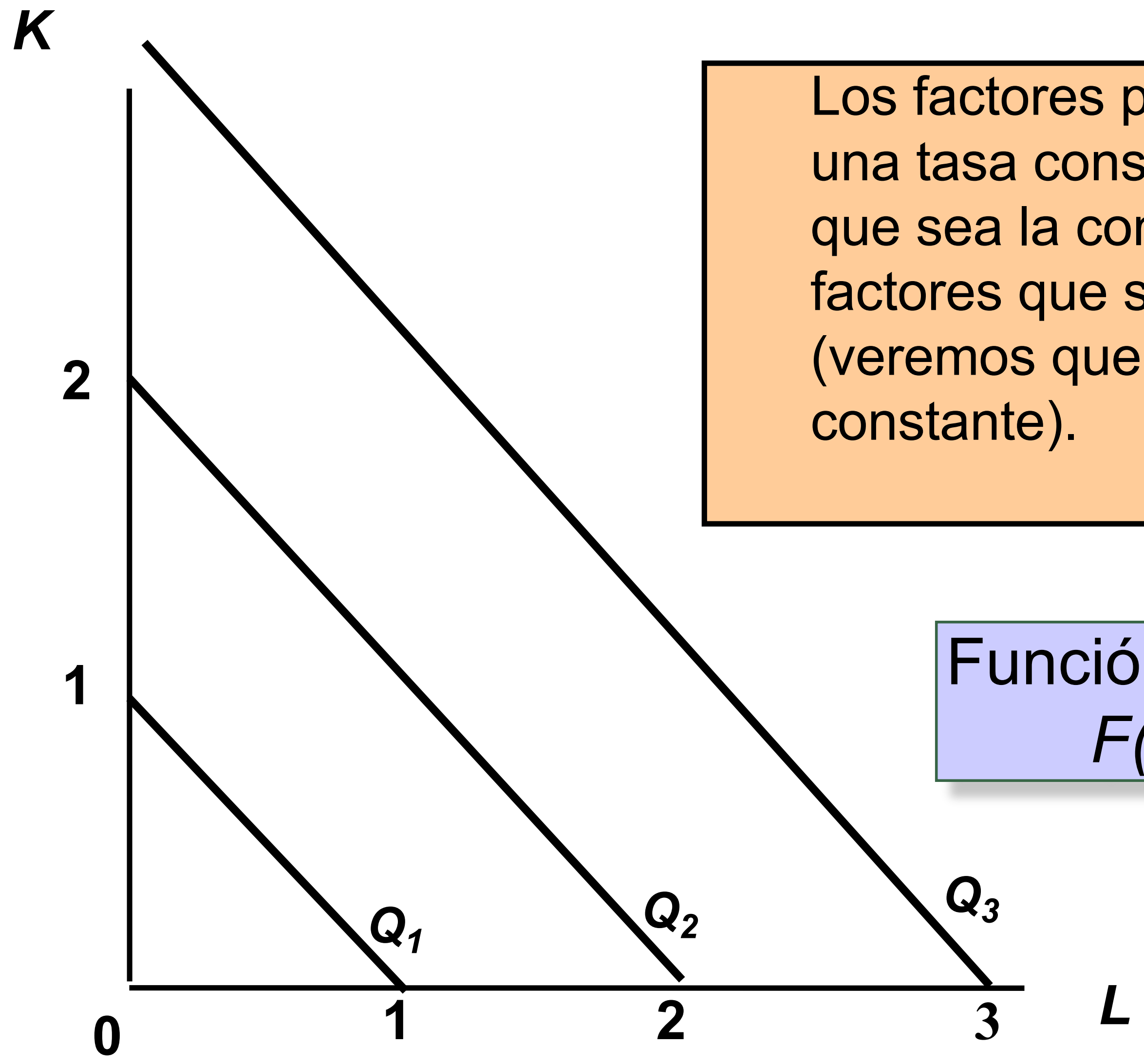


Isocuantas: describen las combinaciones de factores que permiten obtener 55, 75 y 90 unidades de producto.

Factores Sustitutivos y Complementarios Imperfectos



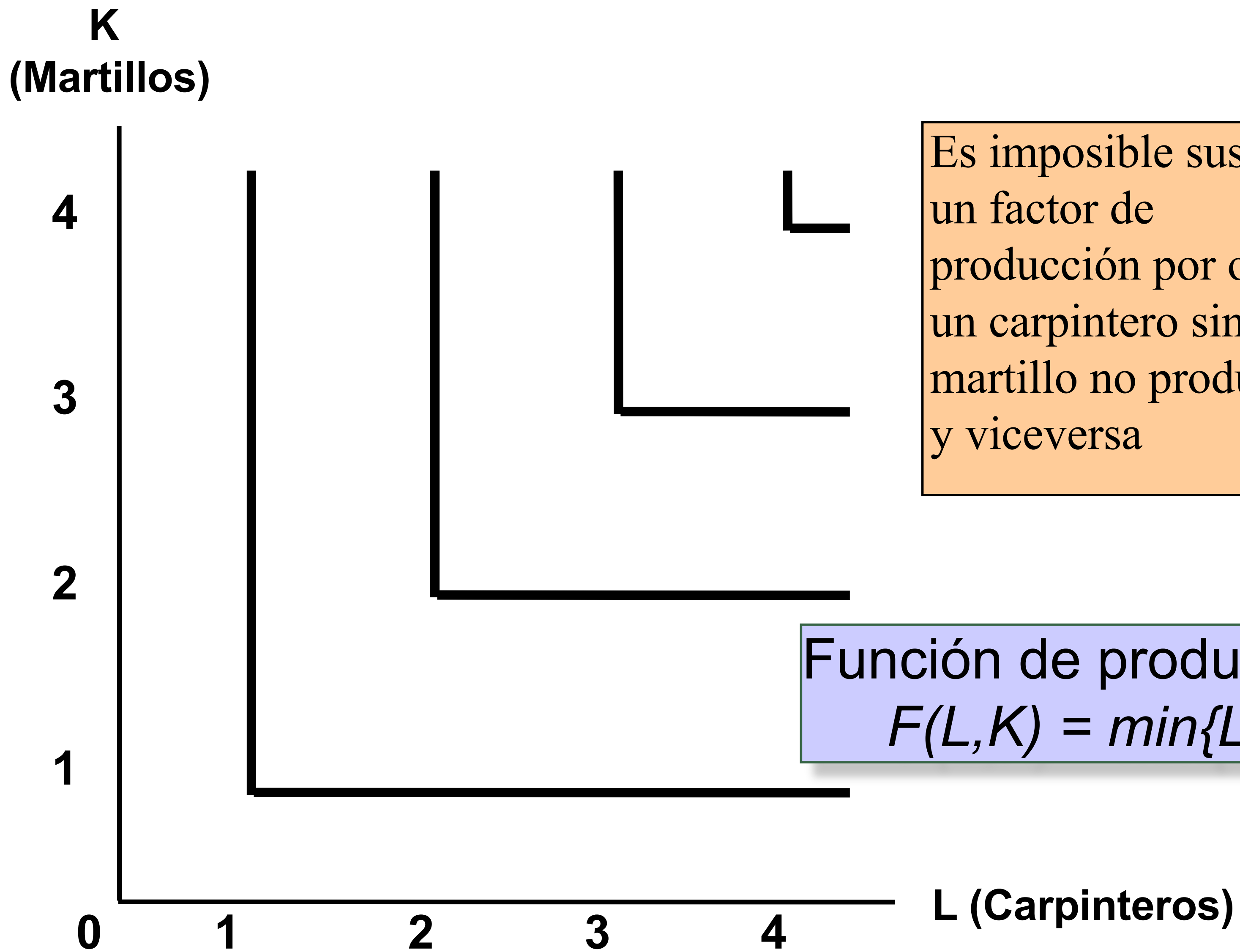
Factores Sustitutivos Perfectos



Los factores pueden sustituirse a una tasa constante, cualquiera que sea la combinación de factores que se esté utilizando (veremos que la RMST es una constante).

Función de producción:
$F(L,K) = L + K.$

Factores Complementarios Perfectos



Es imposible sustituir un factor de producción por otro: un carpintero sin martillo no produce, y viceversa

Función de producción:
$F(L,K) = min\{L,K\}$

La producción con un factor variable

Vamos a estudiar las curvas de producto.

Para ello, supongamos que todos los factores menos uno son fijos, y consideremos cómo varía la producción con el factor variable:

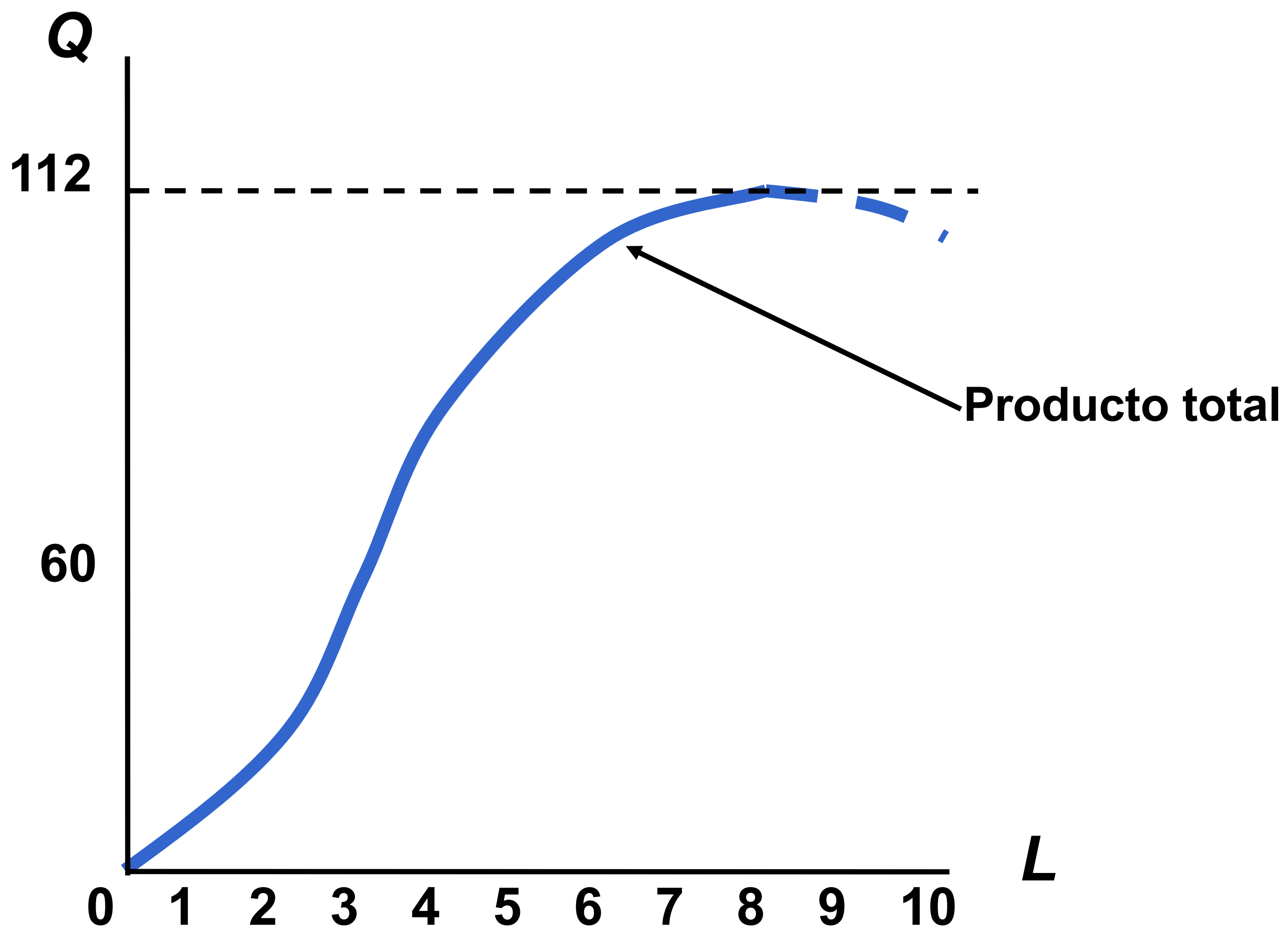
$$\boxed{Q = F(L,K_0) = f(L)}$$

Ejemplo numérico: producción con un factor variable

Cantidad de trabajo (*L*)	Cantidad de capital (*K*)	Producción total (*Q*)
0	10	0
1	10	10
2	10	30
3	10	60
4	10	80
5	10	95
6	10	108
7	10	112
8	10	112
9	10	108
10	10	100

Suponemos que el capital es el input fijo y el trabajo el factor variable

Curva de producto total



Producto medio

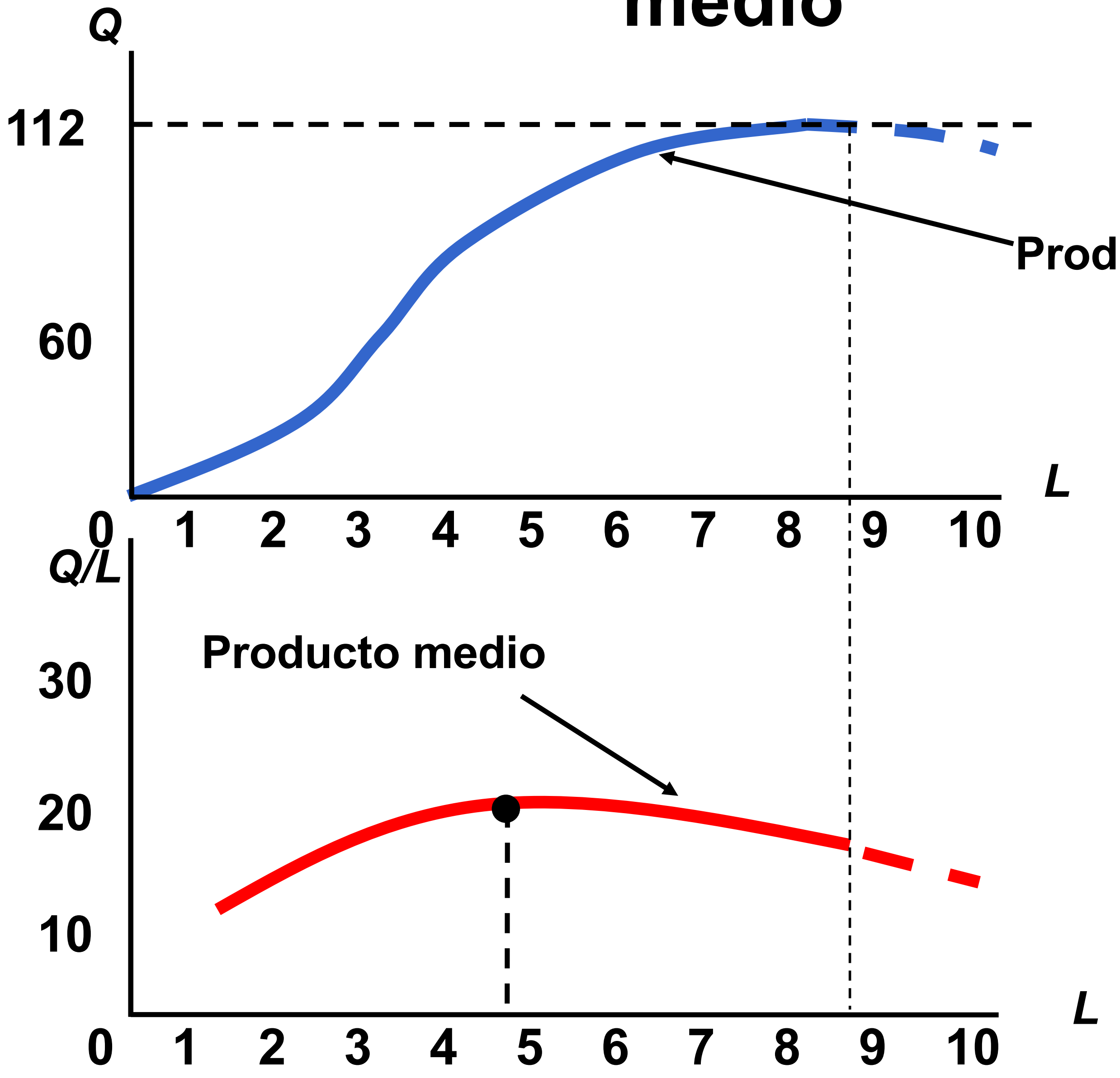
Definimos el producto medio del trabajo (PMe_L) como la cantidad de output producida por cada unidad de trabajo

$$\boxed{PMe_L = Q / L}$$

Ejemplo numérico: producto medio

Cantidad de trabajo (*L*)	Cantidad de capital (*K*)	Producción total (*Q*)	Producto medio
0	10	0	0
1	10	10	10
2	10	30	15
3	10	60	20
4	10	80	20
5	10	95	19
6	10	108	18
7	10	112	16
8	10	112	14
9	10	108	12
10	10	100	10

Curvas de producto total y de producto medio



Producto marginal

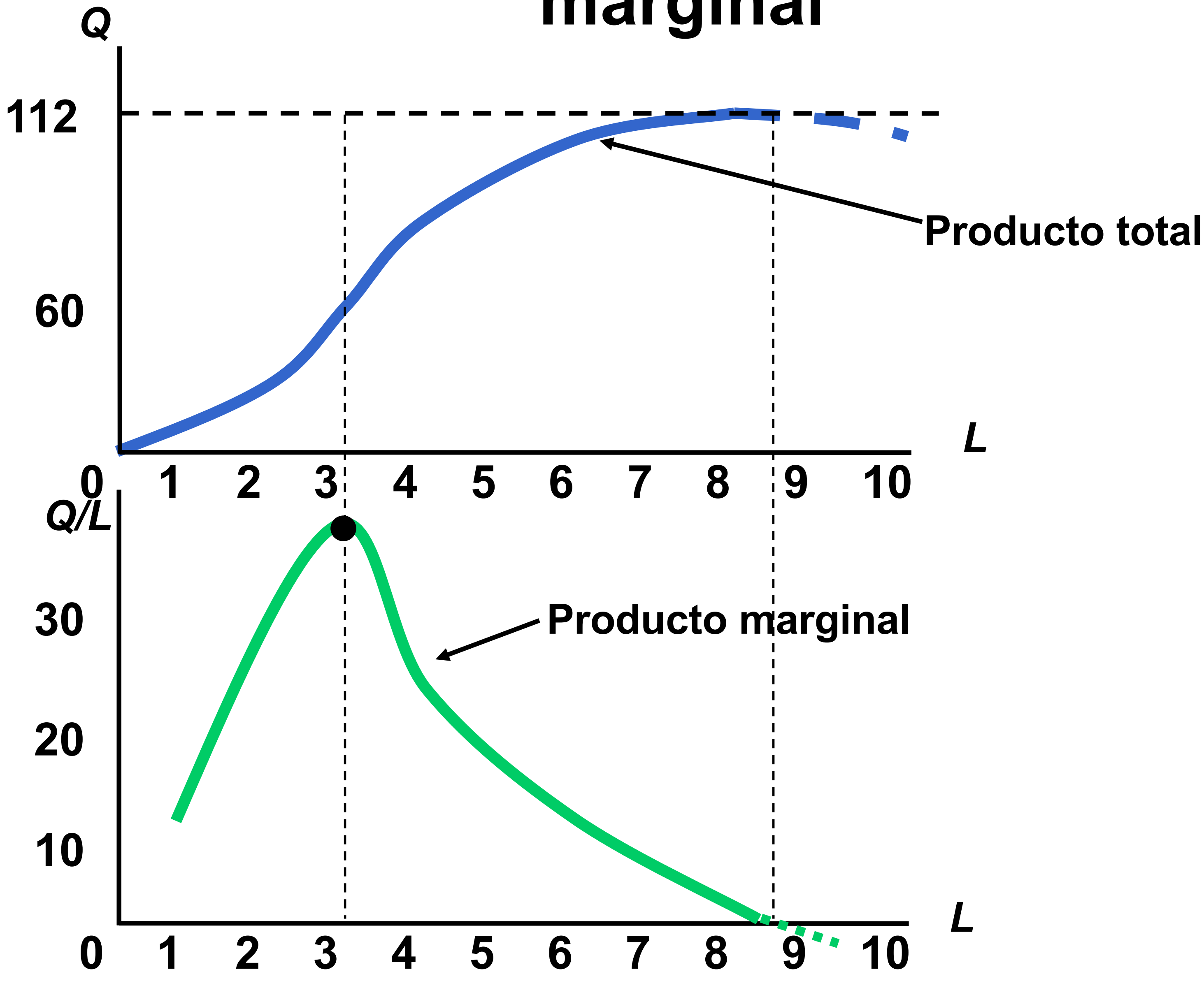
El producto marginal del trabajo (PM_L) se define como la producción adicional obtenida cuando se incrementa la cantidad de trabajo en una unidad

$$\boxed{PM_L = \frac{dQ}{dL}}$$

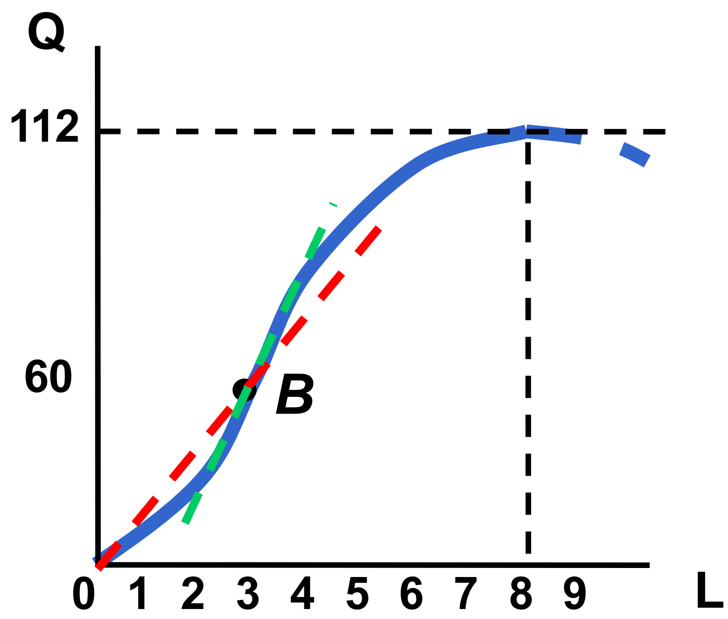
Ejemplo numérico: producto marginal

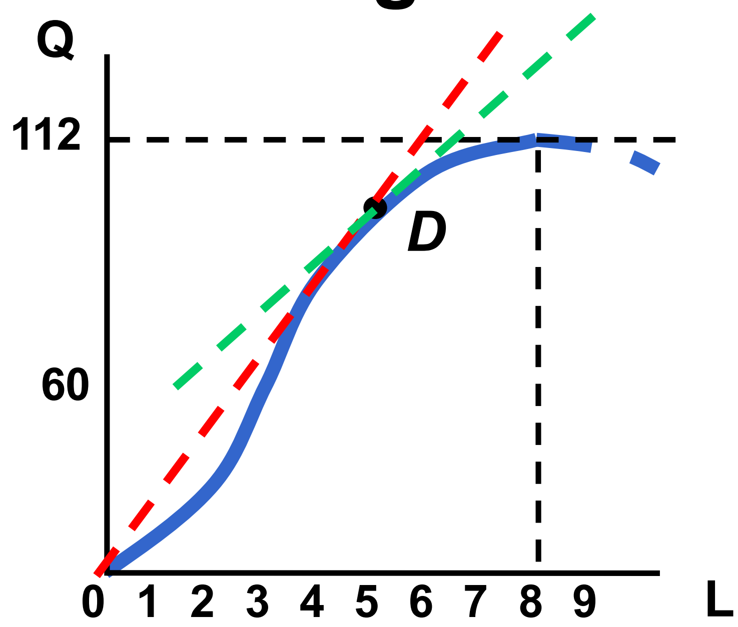
Cantidad de trabajo (*L*)	Cantidad de capital (*K*)	Producción total (*Q*)	Producto medio	Producto marginal
0	10	0	0	---
1	10	10	10	10
2	10	30	15	20
3	10	60	20	30
4	10	80	20	20
5	10	95	19	15
6	10	108	18	13
7	10	112	16	4
8	10	112	14	0
9	10	108	12	-4
10	10	100	10	-8

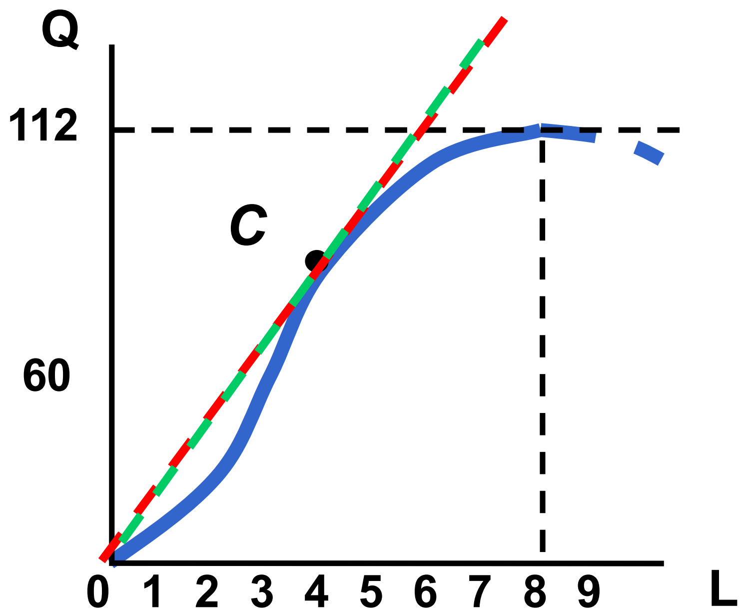
Curvas de producto total y de producto marginal



Producto medio y producto marginal





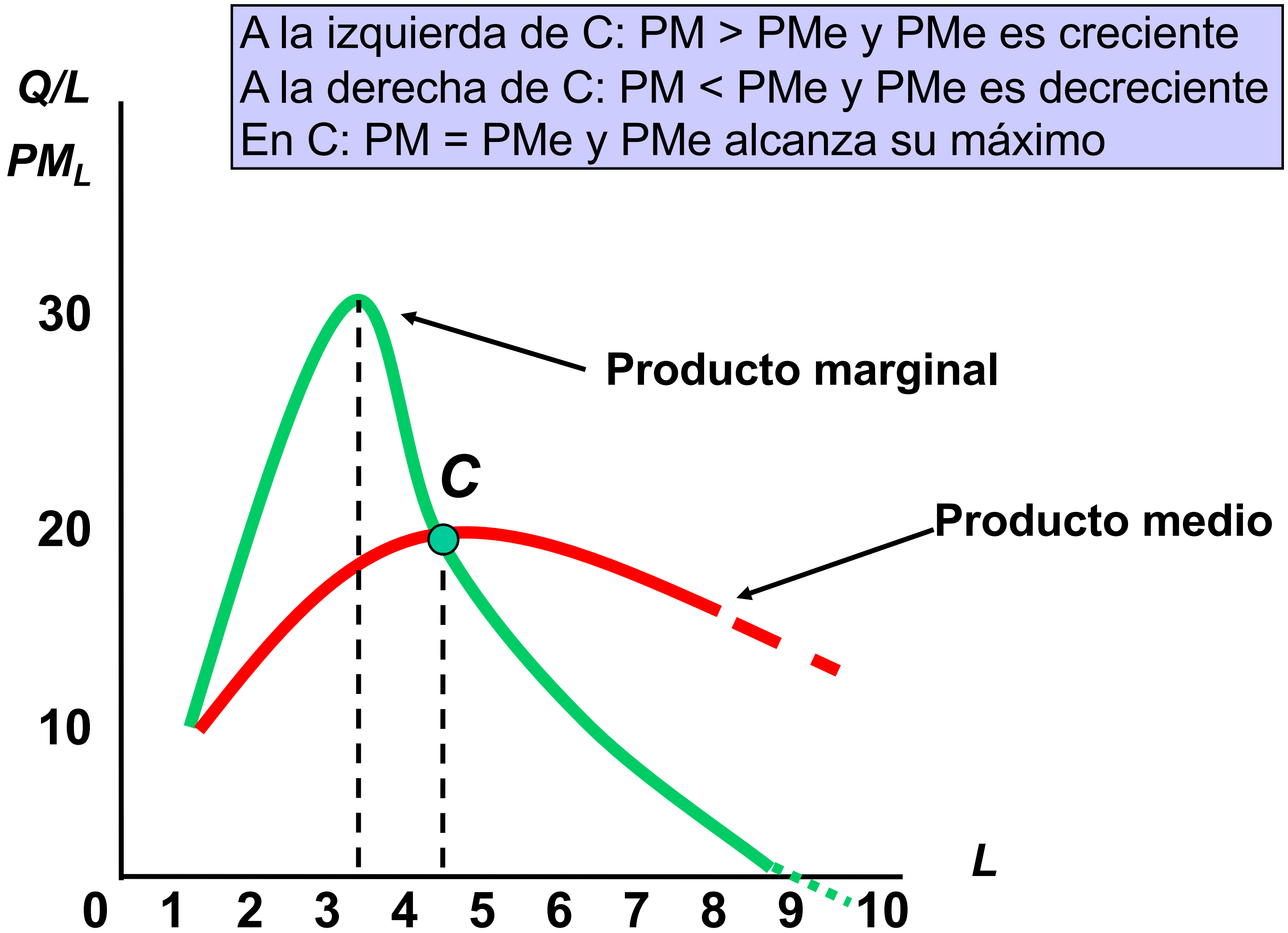


En B $\rightarrow$ $Q/L < dQ/dL$

En C $\rightarrow$ $Q/L = dQ/dL$

En D $\rightarrow$ $Q/L > dQ/dL$

Producto medio y producto marginal

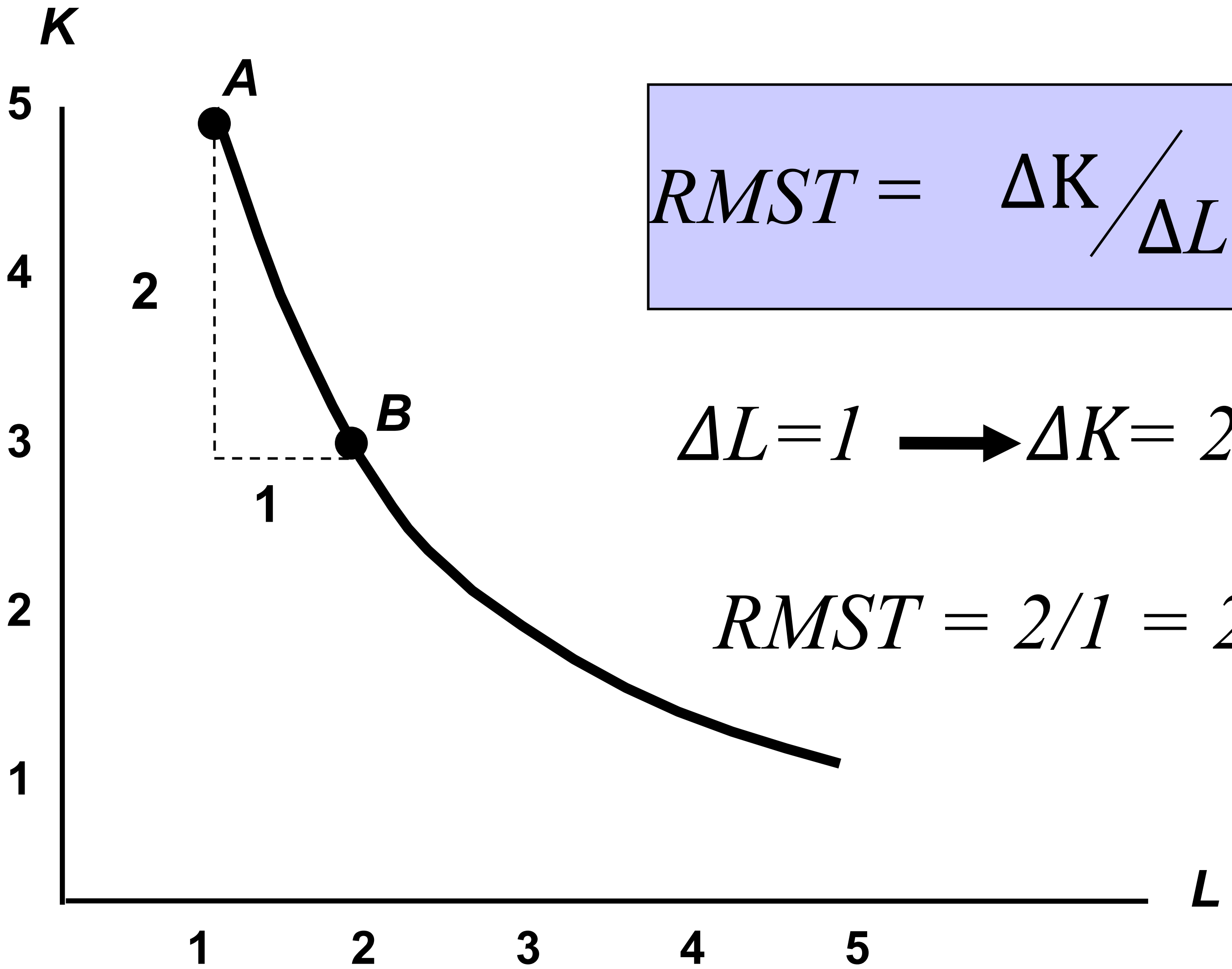


Relación Marginal de Sustitución Técnica

La Relación Marginal de Sustitución Técnica (*RMST*) indica la cantidad de capital necesaria para sustituir una unidad (marginal) de trabajo, de manera que la producción permanezca constante:

$$RMTS = F_L / F_K.$$

Relación Marginal de Sustitución Técnica

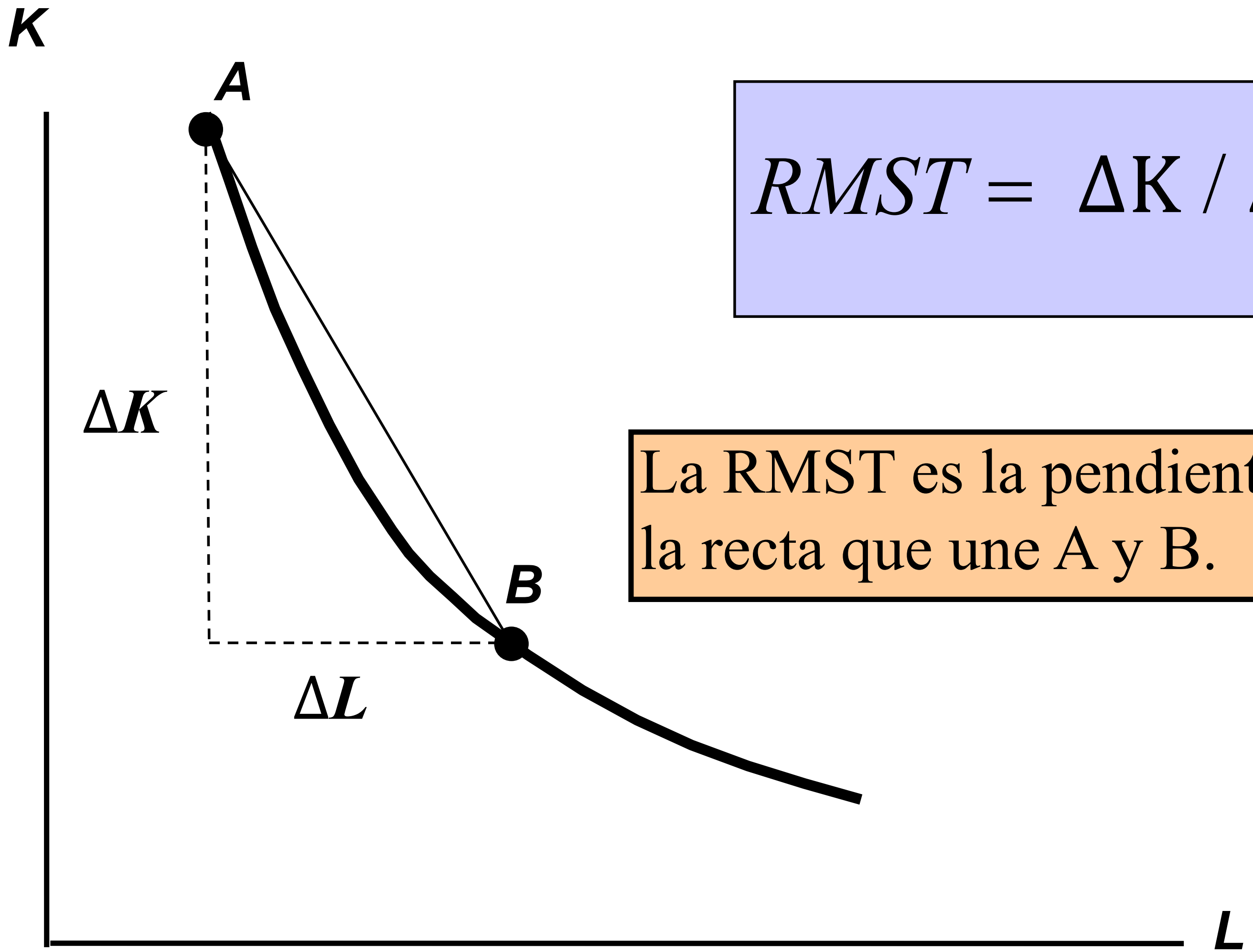


$$RMST = \Delta K / \Delta L$$

$$\Delta L = 1 \longrightarrow \Delta K = 2$$

$$RMST = 2/1 = 2$$

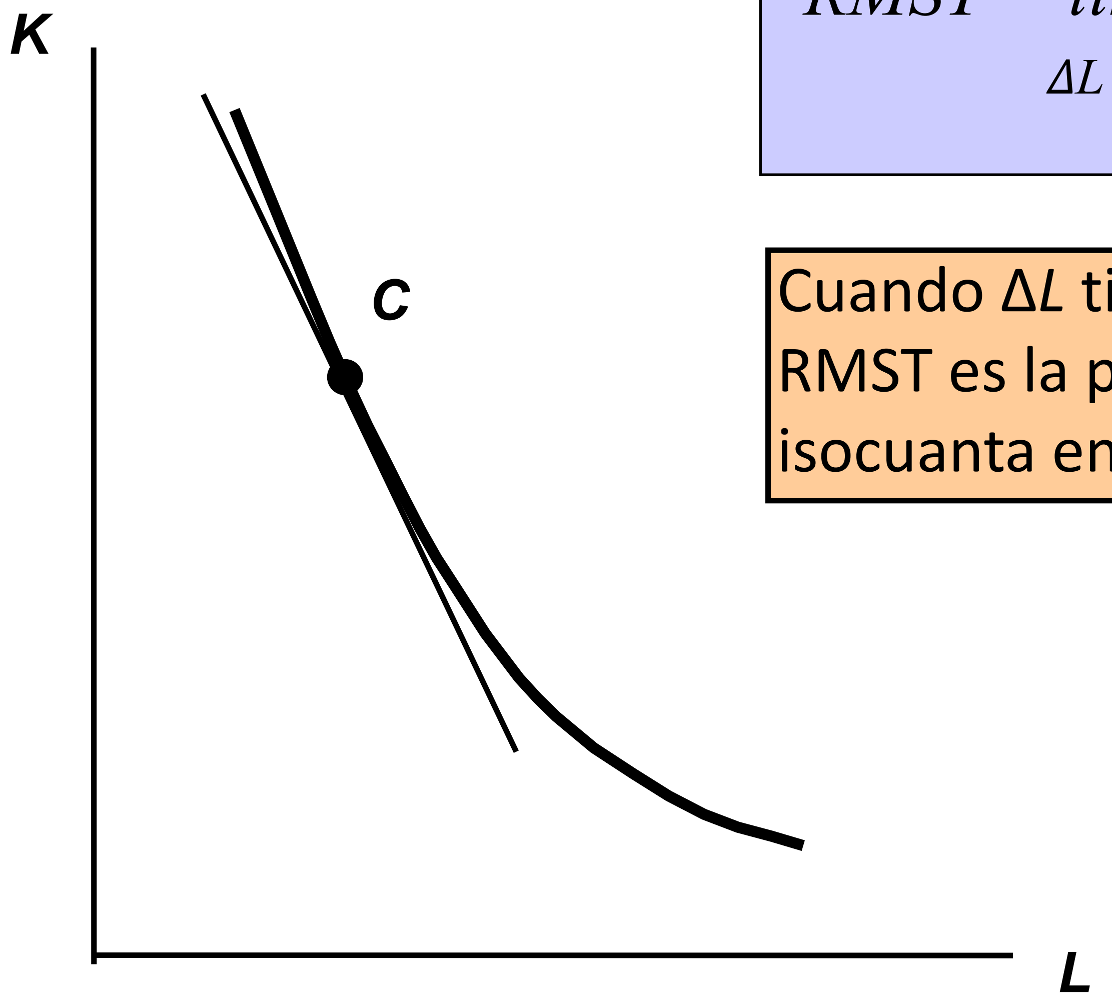
Relación Marginal de Sustitución Técnica



$$RMST = \Delta K / \Delta L$$

La RMST es la pendiente de la recta que une A y B.

Relación Marginal de Sustitución Técnica



$$RMST = \lim_{\Delta L \to 0} \Delta K / \Delta L$$

Cuando Δ*L* tiende a cero, RMST es la pendiente de la isocuanta en el punto C.

Cálculo de la RMST

Análogamente a lo que hacíamos con las funciones de utilidad, podemos calcular la RMST como un cociente de productos marginales utilizando el Teorema de la Función Implícita:

$$F(L,K)=Q_0 \qquad (*)$$

donde $Q_0=F(L_0,K_0)$.

Derivando totalmente la ecuación (*), tenemos

$$F_L dL + F_K dK = 0.$$

La derivada de la función que define la ecuación (*) es

$$dK/dL = -F_L/F_K .$$

Esta fórmula nos permite evaluar la *RMST* en cualquier punto de la isocuanta.

Ejemplo: Cobb-Douglas

$F(L,K) = L^{3/4}K^{1/4}$

$F_L = 3/4\ (K / L)^{1/4}$

$F_K = 1/4\ (L / K)^{3/4}$

$RMST = F_L / F_K = 3K / L$

Ejemplo: Sustitutivos Perfectos

$F(L,K) = L + 2K$.

$F_L = 1$

$F_K = 2$

$RMST = F_L / F_K = 1/2$ (constante)

Rendimientos a Escala

Modificación de la escala: variación de la cantidad de factores en la misma proporción

Ejemplos:

$(L,K) \rightarrow (2L,2K)$)

$(L,K) \rightarrow (L/3,K/3)$)

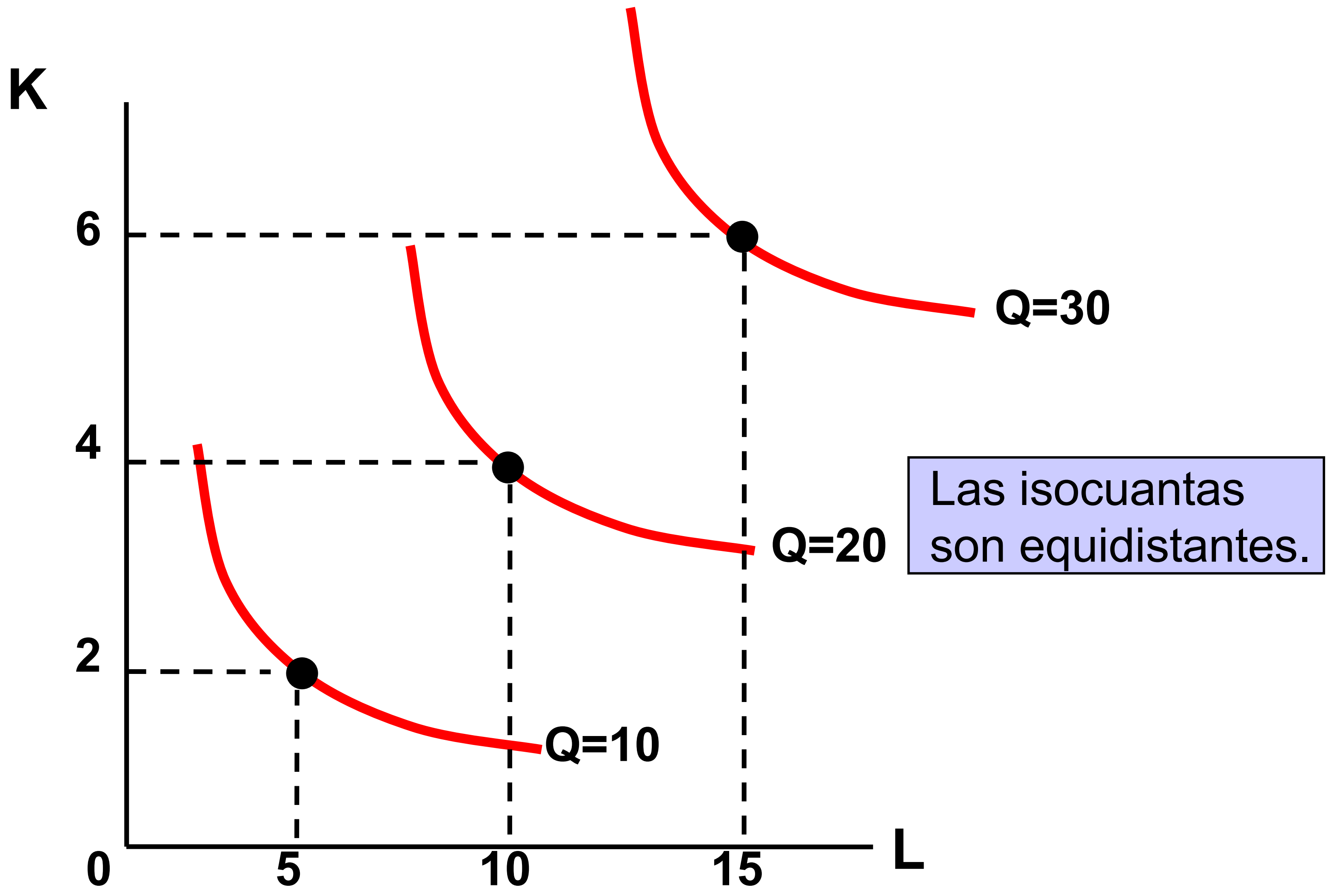
Rendimientos a escala: tasa de variación de la producción debida a variaciones de la escala.

Rendimientos a Escala

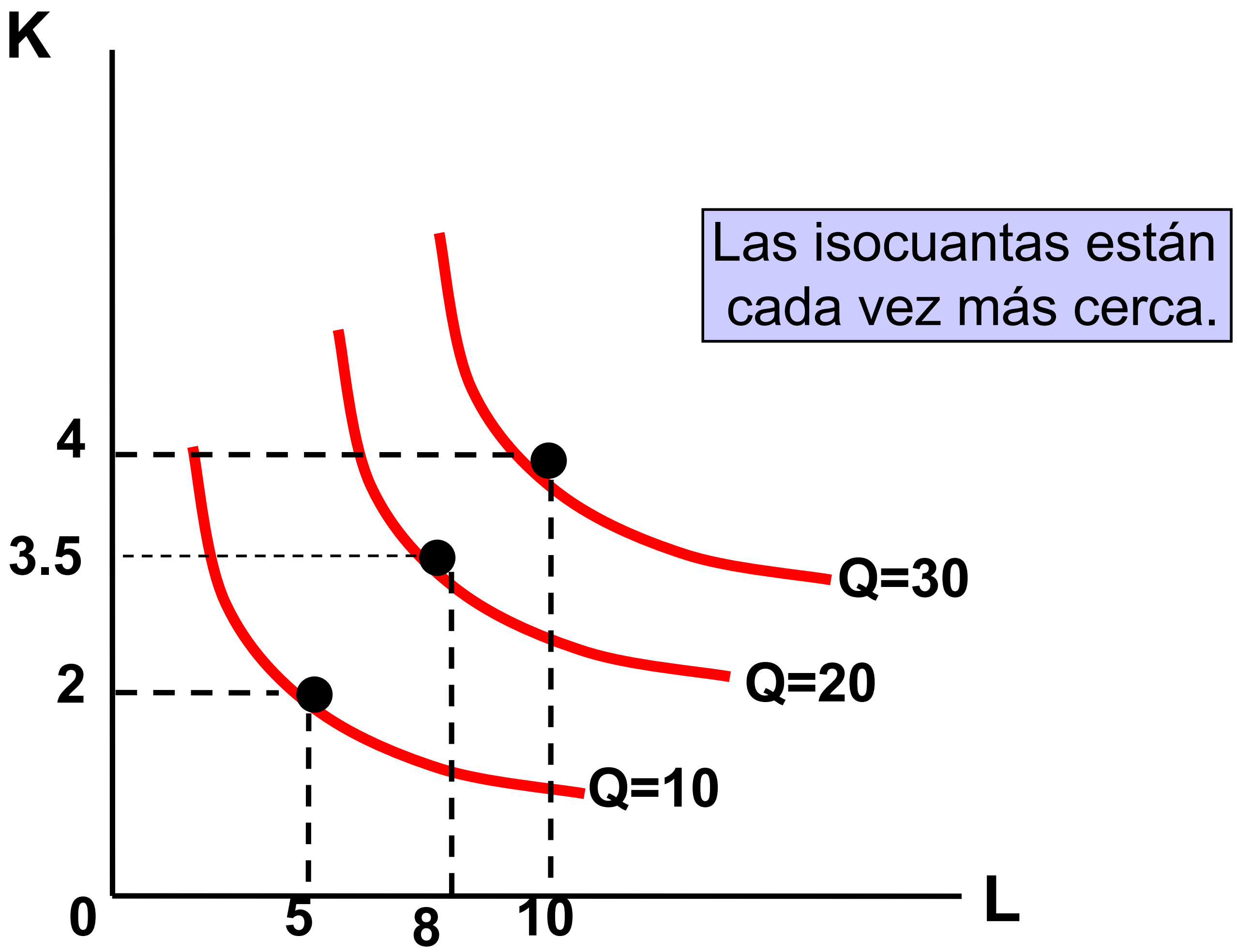
Si $F(L,K)$ es la función de producción de una Empresa y $\lambda > 1$, decimos que la empresa tiene rendimientos a escala

- crecientes si $F(\lambda L, \lambda K) > \lambda F(L,K)$
- constantes si $F(\lambda L, \lambda K) = \lambda F(L,K)$
- decrecientes si $F(\lambda L, \lambda K) < \lambda F(L,K)$.

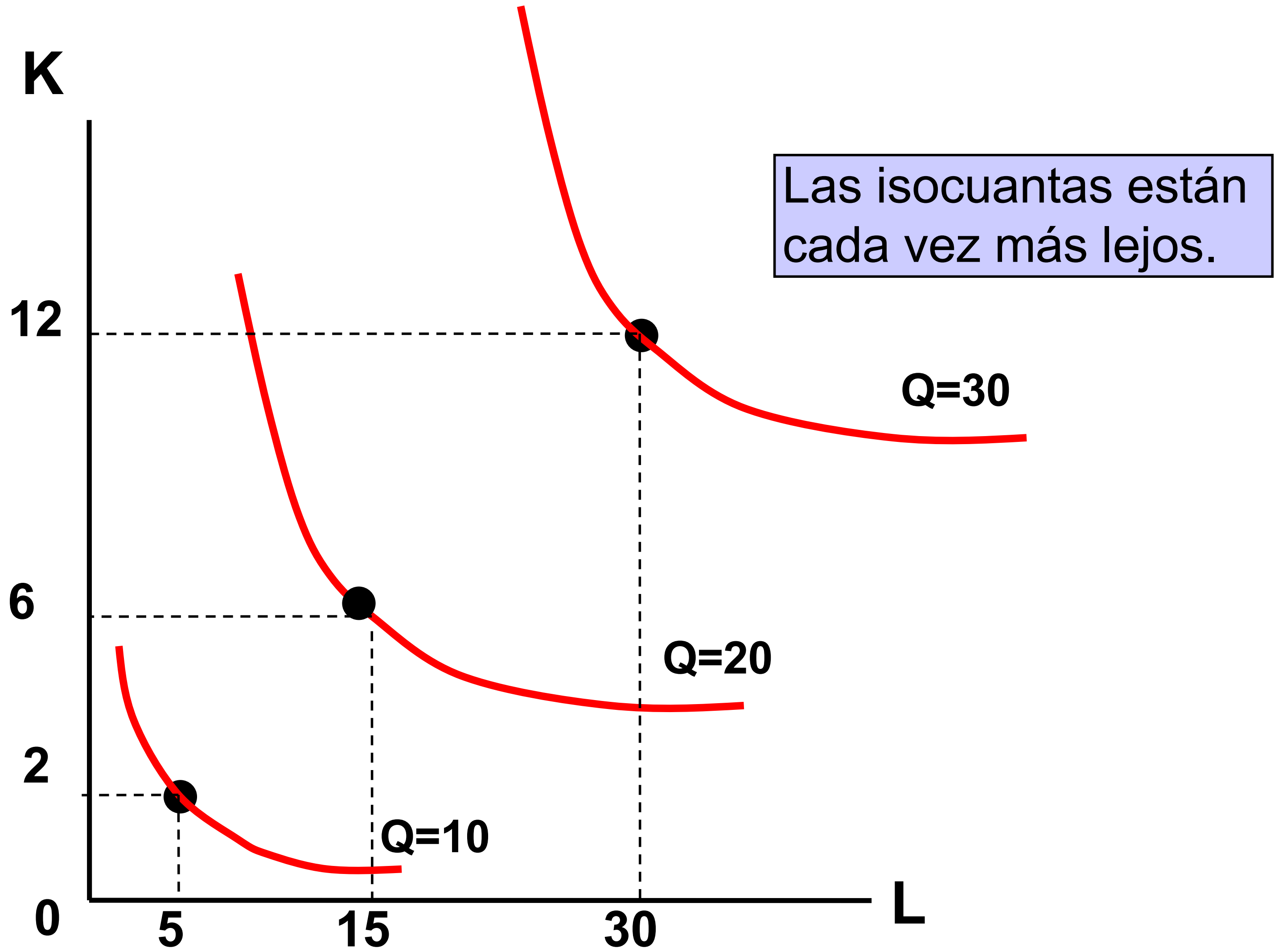
Ejemplo: Rendimientos Constantes a Escala



Ejemplo: Rendimientos Crecientes a Escala



Ejemplo: Rendimientos Decrecientes a Escala



Ejemplos: Rendimientos a Escala

Determine los redimientos a escala de una empresa cuya función de producción es

(a) $F(L,K) = L\,K$;

(b) $F(L,K) = L + K$

(c) $F(L,K) = (LK)^{1/3}$

(d) $F(L,K) = \min\{L,2K\}$.

Ejemplos: Rendimientos a Escala

(a) Crecientes:

$$F(\lambda L, \lambda K) = (\lambda L)(\lambda K) = \lambda^2(LK) > \lambda F(L,K).$$

(b) Constantes:

$$F(\lambda L, \lambda K) = (\lambda L) + (\lambda K) = \lambda(L+K) = \lambda F(L,K).$$

(c) Decrecientes:

$$F(\lambda L, \lambda K) = ((\lambda L)(\lambda K))^{1/3} = \lambda^{2/3}(LK)^{1/3} < \lambda F(L,K).$$

(d) Constantes:

$$F(\lambda L, \lambda K) = min\{\lambda L, 2\lambda K) = \lambda min\{L,2K) = \lambda F(L,K).$$

Transformaciones Monótonas

En contraste con la teoría del consumidor, en las que las funciones de utilidad proporcionan una representación ordinales de las preferencias, las funciones de producción proporcionan una descripción cardinal del conjunto de posibilidades de producción de la empresa:

Que una función de producción sea una transformación monótona de otra función de producción no implica que las tecnologías que representan sean las mismas, aunque si lo sean las posibilidades de sustitución de factores (la RMST).

Transformaciones Monótonas

Por ejemplo, las funciones de producción

$$F(L,K) = LK, \quad G(L,K) = (LK)^{1/3}$$

son transformaciones monótonas una de otra, aunque representan tecnologías distintas: la tecnología que describe F presenta rendimientos crecientes a escala, mientras que la que describe G presenta rendimientos constantes a escala.

Sin embargo,

$$\mathrm{RMST}_F(L,K) = \mathrm{RMST}_G(L,K) = K/L.$$