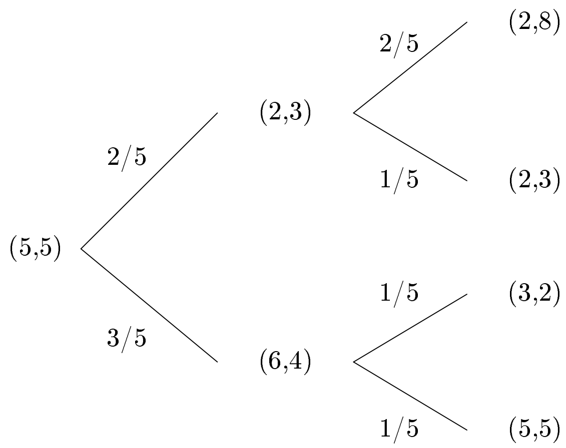
EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV
4 DE FEBRERO 2005

1. **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con dos agentes, un bien y en la que cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

$$u^i(x) = \sum_s \pi_s \ln x_s$$

donde π_s y los recursos de los agentes están representados en la figura siguiente,



a) Determinar todas las asignaciones Pareto eficientes. Supongamos que en una determinada asignación Pareto eficiente, x_s^i, se verifica que $x_0^1 = 4$. Determinar los consumos x_{21}^2 y x_{12}^2 en esa asignación.

b) Determinar las asignaciones de equilibrio y los precios suponiendo que los mercados son del tipo Arrow–Debreu. Una asignación en la que el agente 1 consume $x_{12}^1 = 3$, ¿puede ser parte del equilibrio de Arrow–Debreu? ¿Por qué?

Solución:

a) Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $I = \{1, 2\}$, $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha_i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha_i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha_i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha_i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s, \quad i = 1, 2 \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

En la asignación Pareto eficiente se verifica que $x_0^1 = 4$, por lo que

$$\alpha_1 = \frac{x_0^1}{w_0^1 + w_0^2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

de donde

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{3}{5}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} x_{21}^2 =& \alpha_2 (w_{21}^1 + w_{21}^2) = \frac{30}{5} = 6 \\ x_{12}^2 =& \alpha_2 (w_{12}^1 + x_{12}^2) = \frac{30}{5} = 6 \end{aligned}$$

b) Utilizaremos que, en el apartado a), las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha_i w_s$ con $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.
Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha_i \pi_s = \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. Las asignaciones de Arrow–Debreu son

$$x_s^i = \alpha_i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$\begin{gathered} p_0 = \tfrac{1}{10} \\ p_{11} = \tfrac{2}{25}, \quad p_{12} = \tfrac{3}{50} \\ p_{21} = \tfrac{1}{25}, \quad p_{22} = \tfrac{1}{25}, \quad p_{23} = \tfrac{1}{25}, \quad p_{24} = \tfrac{1}{50} \end{gathered}$$

Por tanto, las rentas de los agentes son

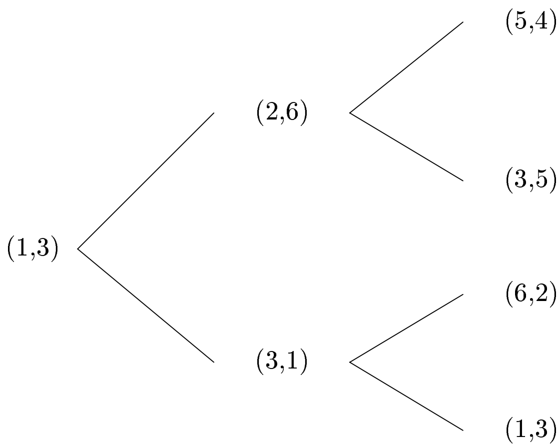
$$\begin{aligned} \text{agente 1: } \sum_{s \in S} p_s w_s^1 &= 3\frac{1}{10} + 5\frac{2}{25} + 4\frac{3}{50} + 3\frac{1}{25} + 5\frac{1}{25} + 5\frac{1}{25} + 3\frac{1}{50} = \frac{7}{5} \\ \text{agente 2: } \sum_{s \in S} p_s w_s^2 &= 1\frac{1}{10} + 3\frac{2}{25} + 0\frac{3}{50} + 1\frac{1}{25} + 3\frac{1}{25} + 3\frac{1}{25} + 1\frac{1}{50} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

de donde, $\alpha_1 = 7/15$, $\alpha_2 = 8/15$ y tenemos las asignaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} &x_0^1 = 14/3, x_{11}^1 = 7/3, \quad x_{12}^1 = 14/3, \quad x_{21}^1 = 14/3, \quad x_{22}^1 = 7/3, \quad x_{23}^1 = 7/3, \quad x_{24}^1 = 14/3 \\ &x_0^2 = 16/3, x_{11}^2 = 8/3, \quad x_{12}^2 = 16/3, \quad x_{21}^2 = 16/3, \quad x_{22}^2 = 8/3, \quad x_{23}^2 = 8/3, \quad x_{24}^2 = 16/3 \end{aligned}$$

por lo que $x_{12}^1 = 3$ no es parte del equilibrio de Arrow–Debreu.

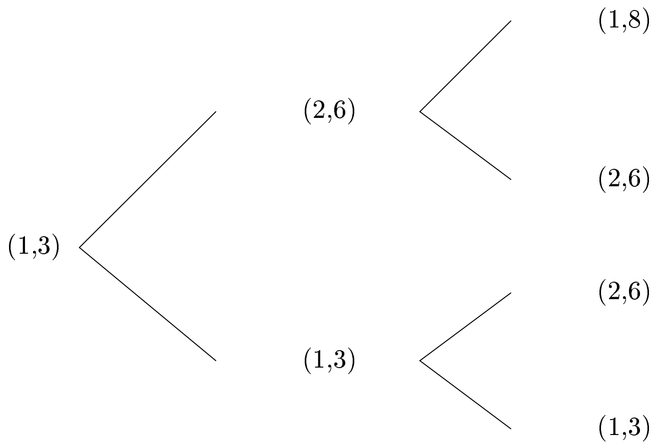
2. **(2 puntos)**
Consideremos una economía de Radner con dos agentes, dos activos y un bien, en la que los recursos iniciales de los agentes son



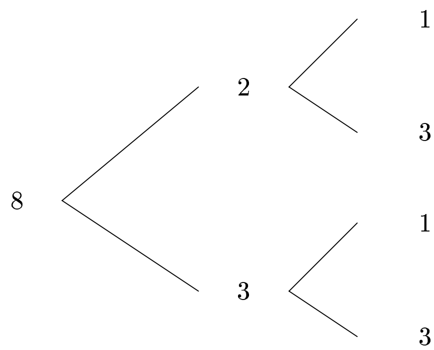
Los dividendos de los activos son,

	r_1	r_2
e_{21}	1	3
e_{22}	1	1
e_{23}	2	0
e_{24}	1	2

Supongamos que los mercados son dinámicamente completos y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, las asignaciones de equilibrio son



y los precios de equilibrio son



Determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.

Solución: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 4 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 5 \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad 9 \end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 2 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad \tfrac{5}{3} \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad \tfrac{9}{8} \end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 6 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 6 \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad 12 \end{aligned}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 3 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 2 \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{0}: &\quad 0 \\ \text{nodo } e_{11}: &\quad 0 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad -2 \\ \text{nodo } e_{21}: &\quad -4 \\ \text{nodo } e_{22}: &\quad -1 \\ \text{nodo } e_{23}: &\quad -4 \\ \text{nodo } e_{24}: &\quad 0 \end{aligned}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 + 3\theta_2 &= -4 \\ \theta_1 + \theta_2 &= -1 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 1/2$ y $\theta_2 = -3/2$. El precio de esta cartera es

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{-3}{2} = \frac{-7}{2}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es:

$$0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{aligned} 2\theta_1 &= -4 \\ \theta_1 + 2\theta_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -2$ y $\theta_2 = 1$. El precio de esta cartera es

$$(-2) \cdot \frac{5}{3} + 1 \cdot 2 = -\frac{4}{3}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$-2 - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{array}{r} 2\theta_1 + 3\theta_2 = -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{3}\theta_1 + 2\theta_2 = -\frac{10}{3} \end{array}\right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = -3$, $\theta_2 = 5/6$. Resumiendo, la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	-3	5/6
e_{11}	1/2	-3/2
e_{12}	-2	1

3. **(1 punto)**
Consideremos una economía secuencial con un bien, dos periodos y tres estados posibles en el segundo periodo. Supongamos que hay dos activos $r_1 = (1, 2, 1)$ y $r_2 = (1, 0, 2)$, cuyos precios son, respectivamente, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$. Probar que hay arbitraje en la economía y encontrar una cartera que lo realiza.

Solución: La matriz de dividendos es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\mathrm{rg}(R) = 2$ y el número de estados es 3, los mercados no son completos. Para determinar si hay arbitraje o no, consideramos el siguiente sistema lineal de ecuaciones,

$$\begin{aligned} Q_1 + 2Q_2 + Q_3 &= 1 \\ Q_1 + 2Q_3 &= 2 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos $Q_1 = 2 - 2Q_3$. Para que $Q_1 > 0$, debe verificarse que $Q_3 < 1$. Y sustituyendo en la primera ecuación queda $2Q_2 - Q_3 = -1$ es decir $2Q_2 = Q_3 - 1 < 0$ por lo que $Q_2 < 0$ y no hay ninguna solución con $Q_1, Q_2, Q_3 > 0$.

Vemos que $2r_1 > r_2$ pero $2q_1 = q_2$. Esto sugiere que el activo r_2 está sobrevalorado y podemos venderlo al corto. Una estrategia de arbitrage es $z_1 = 2$, $z_2 = -1$, ya que

$$q_1 z_1 + q_2 z_2 = 0$$

pero

$$R \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. **(1 punto)**
Enunciar el Segundo Teorema del Bienestar Social.

Solución:
Supongamos que $x^* >> 0$ es una asignación Pareto eficiente en una economía de intercambio en la que las preferencias de los agentes son convexas, continuas y monótonas. Entonces, la asignación x^* es un equilibrio de Walras para la economía con los mismos agentes y los recursos iniciales $w^i = x_i^*$ para cada agente $i = 1, \ldots, I$.

5. **(1 punto)**
Consideremos una economía de intercambio con dos bienes y dos agentes cuyas funciones de utilidad son
$$u_i(x, y) = xy, \qquad i = 1, 2$$
Los recursos iniciales son
$$w^1 = (a, b), \quad w^2 = (9 - a, 15 - b)$$
Sabiendo que la asignación
$$x^1 = (3, 5), \quad x^2 = (6, 10)$$
es un óptimo de Pareto (no hace falta demostrar esto) se pide encontrar algunos valores para a y b de forma que la asignación anterior sea también un equilibrio competitivo y calcular los precios de equilibrio en ese equilibrio.

Solución: Como la asignación x^1, x^2 es factible y vacía los mercados es suficiente encontrar un sistema de precios (p_1, p_2) en los que la asignación de cada agente maximiza su función de utilidad sujeto a la restricción presupuestaria.

Sean (p_1, p_2) los precios en el equilibrio competitivo. Entonces para cada agente $i = 1, 2$ las condiciones de primer orden en el máximo $(x, y) = (3, 5)$ son
$$\nabla u_i(x, y) = \lambda(p_1, p_2)$$
para un cierto $\lambda > 0$. Además, el punto (x, y) debe verificar la restricción presupuestaria
$$30 = p_1 x + p_2 y = p_1 a + p_2 b$$
De la condición de primer orden obtenemos que
$$(y, x) = \lambda(p_1, p_2)$$
por lo que
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{y}{x} = \frac{5}{3}$$
Por tanto, con los precios
$$p_1 = 5, \qquad p_2 = 3$$
cada agente maximiza su función de utilidad. Y para que se verifique la restricción presupuestaria
$$30 = p_1 a + p_2 b$$
es suficiente tomar cualquier valor de $a, b > 0$ que satisfaga la ecuación
$$30 = 5a + 3b$$

6. **(2 puntos)**
Un agente evalúa todas las posibles loterías sobre cuatro sucesos $\{A, B, C, D\}$. Utilizamos el vector (p_A, p_B, p_C, p_D) para representar las probabilidades de que ocurra cada uno de los sucesos anteriores. Se sabe la siguiente información sobre la relación de preferencias del agente:
a) El suceso seguro A es preferido a cualquier otra lotería.
b) Cualquier lotería es preferida al suceso seguro D.
c) Es indiferente entre la lotería $(1/8, 0, 1/2, 3/8)$ y la lotería $(1/4, 0, 0, 3/4)$.
d) Es indiferente entre la lotería $(1/4, 1/2, 0, 1/4)$ y la lotería $(0, 1, 0, 0)$.
e) Prefiere el suceso seguro C al suceso seguro B
¿Es posible representar las preferencias del agente por una función de utilidad $u(p_A, p_B, p_C, p_D)$ en forma de utilidad esperada? ¿Por qué?

Supongamos que fuera posible representar las preferencias del agente por una función de utilidad de la forma
$$u(p_A, p_B, p_C, p_D) = p_A u_A + p_B u_B + p_C u_C + p_D u_D$$
Por (a) y (b) normalizamos
$$u_A = 1, \qquad u_D = 0$$
por lo que podemos suponer que
$$u(p_A, p_B, p_C, p_D) = p_A + p_B u_B + p_C u_C$$
Utilizando (c) tenemos que
$$u(1/8, 0, 1/2, 3/8) = u(1/4, 0, 0, 3/4)$$
es decir
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} u_C = \frac{1}{4}$$
de donde
$$u_C = \frac{1}{4}$$
Utilizando ahora (d) tenemos que
$$u(1/4, 1/2, 0, 1/4) = u(0, 1, 0, 0)$$
es decir,
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} u_B = u_B$$
por lo que
$$u_B = \frac{1}{2}$$
por lo que las preferencias tendrían que poder representarse por la función de utilidad
$$u(p_A, p_B, p_C, p_D) = p_A + \frac{p_B}{2} + \frac{p_C}{4}$$
pero entonces
$$u(0, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}, \qquad u(0, 0, 1, 0) = \frac{1}{4}$$
y esto contradice (e), es decir que B es preferido a C.
Concluimos que **NO** posible representar las preferencias del agente por una función de utilidad en forma de utilidad esperada.

7. **(1 punto)**
Consideremos un agente con unas preferencias sobre cantidades monetarias representadas por la función de utilidad $u(x)$ y unas preferencias sobre loterías que verifican los axiomas del Teorema de la Utilidad Esperada. Supongamos que el agente es estrictamente averso al riesgo (es decir $u''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) y que su riqueza inicial es w. El agente tiene la posibilidad de elegir una cartera con dos activos: El primero es un activo seguro que cuesta 1 unidad monetaria y paga unos dividendos de 1 unidad monetaria. El segundo es un activo de riesgo que cuesta 1 unidad monetaria y tiene un pago aleatorio con una función de distribución $F(z)$ y un pago esperado
$$\int z dF(z) > 1$$
Probar que el agente compra una cantidad positiva del activo de riesgo.
(está resuelto en las notas de clase)