

**SOLUCIONES DEL EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV.
SEPTIEMBRE 2001.**

Problema 1 a): Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Y resolvemos el sistema

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} \quad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha_i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha_i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha_i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha_i w_s.$$

Es decir las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_I \leq 1, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1.$$

Problema 1 b): El problema de maximización de cada agente $i \in I$ es

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i \\ \text{s.a.} & \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \lambda^i \sum_{s \in S} p_s (w_s^i - x_s^i)$$

y las condiciones de primer orden son

$$\frac{\pi_s}{x_s^i} = \lambda^i p_s \quad s \in S$$

de donde

$$\pi_s = \lambda^i p_s x_s^i$$

y sumando para $s \in S$ y teniendo en cuenta la restricción presupuestaria del agente $i \in I$,

$$\sum_{s \in S} \pi_s = \lambda^i \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \lambda^i \sum_{s \in S} p_s w_s^i$$

por lo que

$$\lambda^i = \frac{2}{p \cdot w^i}.$$

Sustituyendo en las condiciones de primer orden, obtenemos que

$$x_s^i = \frac{\pi_s}{\lambda^i p_s} = \frac{\pi_s}{p_s} \frac{p \cdot w^i}{2}.$$

Problema 1 c) : Recordemos que los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Hemos utilizado que, en el apartado a) las asignaciones eficientes de Pareto son $x_s^i = \alpha_i w_s$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha_i \pi_s = \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{2}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 2$. Las asignaciones de Arrow–Debreu son

$$x_s^i = \alpha_i w_s = \frac{p \cdot w^i}{2} w_s, \quad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \quad s \in S, i \in I.$$

Otra forma de hacerlo sería partiendo de que la asignación de Arrow–Debreu es un óptimo de Pareto y, por tanto, de la forma

$$x_s^i = \frac{\pi_s}{\lambda^i p_s} = \frac{\pi_s}{p_s} \frac{p \cdot w^i}{2}.$$

Imponiendo la condición de vaciado de mercado queda, para cada estado $s \in S$,

$$w_s = \sum_{i \in I} x_s^i = \frac{\pi_s}{p_s} \frac{\sum_{i \in I} p \cdot w^i}{2}$$

por lo que

$$\frac{w_s p_s}{\pi_s} = \frac{\sum_{i \in I} p \cdot w^i}{2}$$

para todo estado $s \in S$, es decir, la condición sobre los precios es que

$$\frac{w_1 p_1}{\pi_1} = \frac{w_2 p_2}{\pi_2} = \dots = \frac{w_S p_S}{\pi_S}$$

vemos que una solución es tomar

$$p_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

por lo que

$$x_s^i = \frac{p \cdot w^i}{2} w_s$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Las rentas de los agentes son

$$\begin{aligned}\text{agente 1: } \quad & \sum_{s \in S} p_s w_s^1 = 1/2 \\ \text{agente 2: } \quad & \sum_{s \in S} p_s w_s^2 = 3/2\end{aligned}$$

y tenemos las asignaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}x_{11}^1 = x_{12}^1 = 1, \quad x_{21}^1 = x_{22}^1 = x_{23}^1 = 2, \quad x_{24}^1 = 4 \\ x_{11}^2 = x_{12}^2 = 3, \quad x_{21}^2 = x_{22}^2 = x_{23}^2 = 6, \quad x_{24}^2 = 12\end{aligned}$$

y los precios

$$\begin{aligned}p_{11} = p_{12} = 1/8 \\ p_{21} = p_{22} = p_{23} = 1/32, \quad p_{24} = 1/64\end{aligned}$$

Problema 2: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: \quad & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4 \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3\end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: \quad & \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: \quad & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2\end{aligned}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: \quad & \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: \quad & 1 - 1 = 0 \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & 1 - 2 = -1 \\ \text{nodo } e_{21}: \quad & 2 - 1 = 1 \\ \text{nodo } e_{22}: \quad & 2 - 1 = 1 \\ \text{nodo } e_{23}: \quad & 2 - 1 = 1 \\ \text{nodo } e_{24}: \quad & 4 - 2 = 2\end{aligned}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2 de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22} ,

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 = 1 \\ \theta_1 + \theta_2 = 1 \end{array} \right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 = 0$. El precio de esta cartera es

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es:

$$0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 + \theta_2 = 1 \\ \theta_1 = 2 \end{array} \right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 2$ y $\theta_2 = -1$. El precio de esta cartera es

$$2 \cdot \frac{3}{8} - 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$-1 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{1}{4}\theta_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8}\theta_1 + \frac{1}{4}\theta_2 = \frac{-1}{2} \end{array} \right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = 8$, $\theta_2 = -14$. Resumiendo, la cartera del activo 1 del agente 1 es

$$\begin{array}{ll} \text{nodo } e_0: & 8 \\ \text{nodo } e_{11}: & 1 \\ \text{nodo } e_{12}: & 2 \end{array}$$

mientras que la cartera del activo 2 para el agente 1 es

$$\begin{array}{ll} \text{nodo } e_0: & -14 \\ \text{nodo } e_{11}: & 0 \\ \text{nodo } e_{12}: & -1 \end{array}$$

Problema 3:

- (a) El agente tiene que pagar $y - ty - \theta(y - x) = (1 - t - \theta)y + \theta x$ con probabilidad p y $y - tx$ con probabilidad $1 - p$. Por lo que su utilidad esperada es

$$pu((1 - t - \theta)y + \theta x) + (1 - p)u(y - tx)$$

Su objetivo es maximizar esta función. La condición de primer orden es

$$p\theta u'((1-t-\theta)y+\theta x) - (1-p)tu'(y-tx) = 0$$

Para el caso en que $u(x) = \ln x$, obtenemos

$$\frac{p\theta}{(1-t-\theta)y+\theta x} = \frac{(1-p)t}{y-tx}$$

y sólo falta sustituir los datos del problema y despejar x .

- (b) El agente tiene que pagar $y - ty - \theta(y - x) = (1-t-\theta)y + \theta x$ con probabilidad p y $y - tx$ con probabilidad $1 - p$. Por lo que su utilidad esperada es

$$pu((1-t-\theta)y + \theta x) + (1-p)u(y - tx)$$

Su objetivo es maximizar esta función. Declara su renta verdadera si $y = x$.

En este caso, la condición de primer orden es

$$p\theta u'((1-t-\theta)y + \theta x) - (1-p)tu'(y - tx) \geq 0$$

Sustituyendo $x = y$ esta condición se reduce a

$$p\theta u'(y - ty) - (1-p)tu'(y - ty) = (p\theta + pt - t)u'(y - ty) \geq 0$$

Como $u' > 0$ esto ocurre si y sólo si

$$p\theta + pt - t \geq 0$$

es decir, si y sólo si

$$p \geq \frac{t}{\theta + t}$$

Problema 4:

- (a) Consideramos la matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 3 & z \end{pmatrix}$$

Realizando operaciones con filas obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & y - x \\ 0 & 0 & x - z \end{pmatrix}$$

por lo que la condición es $r_1 = r_3$. Los activos que son combinación lineal de r_1 y r_2 son de la forma

$$(x, y, x)$$

- (b) Las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 &= 1 \\ 3Q_1 + 3Q_3 &= 2 \end{aligned}$$

con $Q_1, Q_2, Q_3 > 0$ son

$$Q_1 = \frac{2}{3} - Q_3, \quad Q_2 = \frac{1}{3}, \quad 0 < Q_3 < \frac{2}{3}$$

Los mercados no son completos porque la solución no es única.

(c) Como $r_4 = 8r_1 - 2r_2$ tenemos que

$$q_4 = 8q_1 - 2q_2 = 8 - 4 = 4$$

Otra forma sería

$$\varphi(r_4) = 2\left(\frac{2}{3} - Q_3\right) + \frac{8}{3} + 2Q_3 = 4$$

(d) Como

$$\varphi(r_5) = 3Q_1 + 3Q_2 + Q_3 = 3 - 2Q_3$$

con

$$0 < Q_3 < \frac{2}{3}$$

el valor de r_5 verifica

$$\frac{5}{3} < \varphi(r_5) < 3$$