SOLUCIONES DEL EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV
13 DE FEBRERO DE 2004

Problema 1 a: Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha_i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha_i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha_i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha_i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Los recursos combinados de los dos agentes en $t = 0$ del bien son 4, por lo que los α's del apartado anterior son

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \qquad \alpha_2 = \frac{3}{4}$$

por tanto

$$x_{11}^1 = \frac{8}{4} = 2, \qquad x_{11}^2 = \frac{24}{4} = 6$$

Problema 1b): Utilizaremos que, en el apartado a), las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha_i w_s$ con $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha_i \pi_s = \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. Las asignaciones de Arrow–Debreu son

$$x_s^i = \alpha_i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$\begin{gathered} p_0 = 1/4 \\ p_{11} = 1/32, \quad p_{12} = 3/16 \\ p_{21} = 1/32, \quad p_{22} = 3/64, \quad p_{23} = 1/64, \quad p_{24} = 3/32 \end{gathered}$$

Por tanto, las rentas de los agentes son

$$\text{agente 1: } \sum_{s \in S} p_s w_s^1 = 0 + \frac{2}{32} + \frac{9}{16} + \frac{2}{32} + \frac{9}{64} + \frac{5}{64} + \frac{3}{32} = \frac{15}{8}$$

$$\text{agente 2: } \sum_{s \in S} p_s w_s^2 = 1 + \frac{6}{32} + \frac{3}{16} + \frac{2}{32} + \frac{15}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{32} = \frac{5}{8}$$

de donde, $\alpha_1 = 5/8$, $\alpha_2 = 3/8$ y tenemos las asignaciones de equilibrio

$$\begin{array}{lllllll} x_0^1 = \frac{5}{2}, & x_{11}^1 = 5, & x_{12}^1 = \frac{5}{2}, & x_{21}^1 = \frac{5}{2}, & x_{22}^1 = x_{23}^1 = 5, & x_{24}^1 = \frac{5}{2} \\ x_0^2 = \frac{3}{2}, & x_{11}^2 = 3, & x_{12}^2 = \frac{3}{2}, & x_{21}^2 = \frac{3}{2}, & x_{22}^2 = x_{23}^2 = 3, & x_{24}^2 = \frac{3}{2} \end{array}$$

La asignación propuesta es parte del equilibrio Arrow–Debreu.

Problema 2: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 1 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2} \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad \tfrac{1}{2} + 3 = \tfrac{7}{2} \\ \text{nodo } e_0: &\quad \tfrac{5}{2} + \tfrac{7}{2} = 6 \end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad \tfrac{\frac{5}{2}}{2} = \tfrac{5}{4} \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad \tfrac{\frac{7}{2}}{3} = \tfrac{7}{6} \\ \text{nodo } e_0: &\quad \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}&: \quad \tfrac{3}{2} \\ \text{nodo } e_{12}&: \quad 6 \\ \text{nodo } e_{0}&: \quad \tfrac{3}{2}+6=\tfrac{15}{2} \end{aligned}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}&: \quad \tfrac{\frac{3}{2}}{2}=\tfrac{3}{4} \\ \text{nodo } e_{12}&: \quad 6/3=2 \\ \text{nodo } e_{0}&: \quad \tfrac{\frac{15}{2}}{8}=\tfrac{15}{16} \end{aligned}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{0}&: \quad 1-0=1 \\ \text{nodo } e_{11}&: \quad 2-2=0 \\ \text{nodo } e_{12}&: \quad 1-3=-2 \\ \text{nodo } e_{21}&: \quad 1-2=-1 \\ \text{nodo } e_{22}&: \quad 2-3=-1 \\ \text{nodo } e_{23}&: \quad 2-5=-3 \\ \text{nodo } e_{24}&: \quad 1-1=0 \end{aligned}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2=-z_s^1$.

En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 \qquad &=-1 \\ \theta_1+\theta_2 \quad &=-1 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1=-1$ y $\theta_2=0$. El precio de esta cartera es

$$(-1)\cdot\frac{5}{4}+0\cdot\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es:

$$0-\frac{5}{4}=-\frac{5}{4}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{aligned} \theta_1=-3 \\ \theta_1+2\theta_2=0 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1=-3$ y $\theta_2=\frac{3}{2}$. El precio de esta cartera es

$$(-3)\cdot\frac{7}{6}+2\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{array}{r} \frac{5}{4}\theta_1 + \frac{3}{4}\theta_2 = -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{6}\theta_1 + 2\theta_2 = -\frac{5}{2} \end{array}\right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = -5/13$, $\theta_2 = -40/39$. Resumiendo, la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	-5/13	-40/39
e_{11}	-1	0
e_{12}	-3	3/2

Problema 3:

(a) Las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 &= 1 \\ Q_1 + Q_2 + 2Q_3 &= 1 \\ 2Q_1 + 2Q_4 &= 1 \end{aligned}$$

son de la forma

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \\ Q_3 &= 1/2 - Q_1 \\ Q_4 &= 1/2 - Q_1 \\ 0 < Q_1 &< 1/2 \end{aligned}$$

Vemos que hay soluciones estrictamente positivas. Por ejemplo,

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = \frac{1}{4}$$

Los mercados no son completos porque el rango de la matriz de dividendos es 3.

(b) Partimos de la matriz

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_4 \end{matrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_4 \end{matrix} = 2$$

Por tanto, los activos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ cuyo precio está determinado por los activos r_1 y r_2 y la condición de no arbitraje en la economía, son aquellos que verifican la ecuación

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

Otra forma de hacerlo sería la siguiente: El precio del activo x es

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1Q_1 + x_2Q_2 + x_3Q_3 + x_4Q_4 \\ &= x_1Q_1 + x_2Q_1 + x_3(1/2 - Q_1) + x_4(1/2 - Q_1) \\ &= (x_3 + x_4)/2 + Q_1(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \end{aligned}$$

y para que $\varphi(x)$ no dependa de los Q_i's debe verificarse las ecuación anterior.

(c) El precio de r_4 debe ser

$$\varphi(r_4) = 4Q_2 + 4Q_4 = 4Q_1 + 2 - 4Q_1 = 2$$

mientras que el precio de r_5 debe ser

$$\varphi(r_5) = 3Q_2 + 5Q_5 = 3Q_1 + \frac{5}{2} - 5Q_1 = \frac{5}{2} - 2Q_1$$

y como $0 < Q_1 < 1/2$, obtenemos

$$\varphi(r_4) = 2$$
$$\frac{3}{2} = \frac{5}{2} - 1 < \varphi(r_5) < \frac{5}{2}$$

(d) En el apartado anterior hemos visto que

$$\frac{3}{2} =< \varphi(r_5) < \frac{5}{2}$$

son los precios compatibles con que no haya arbitraje. Por tanto, con $q_5 = 1$ hay arbitraje. Esto sugiere que comprar r_5 forma parte de una estrategia de arbitraje. Llamando z_i a la cantidad de activo $i = 1, 2, 3, 5$ que compramos, una estrategia de arbitraje (z_1, z_2, z_3, z_5) debe verificar las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_5 &\le 0 \\ z_1 + z_2 + 2z_3 &\ge 0 \\ z_1 + z_2 + 3z_5 &\ge 0 \\ z_1 + 2z_2 &\ge 0 \\ z_1 + 2z_3 + 5z_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

con alguna de las tres últimas desigualdades debe ser estricta. Probando diversos valores vemos que $z_1 = -4$, $z_2 = 2$, $z_3 = 1$, $z_5 = 1$ es una estrategia de arbitraje.

Problema 4): Sea x la cantidad de seguro que compra el agente entonces su función de utilidad es

$$V(x) = \pi \ln(w - qx - 80 + x) + (1 - \pi) \ln(w - qx)$$

las condición de primer orden es

$$\frac{\pi(1-q)}{w - qx - 80 + x} = \frac{q(1-\pi)}{w - qx}$$

Simplificando y recordando que $\pi = q$, obtenemos

$$w - qx - 80 + x = w - qx$$

por lo que la solución es $x = 80$.

Problema 5: Está hecho en clase.