

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV
30 DE ENERO DE 2003

Problema 1 a: Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} \quad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha_i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha_i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha_i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha_i w_s.$$

Es decir las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Problema 1 b, apartado 1: La asignación no es eficiente, porque en el apartado a) hemos demostrado que estas asignaciones son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Si la asignación fuera eficiente, como $x_0^1 = x_0^2 = 2$ y $w_0 = 4$, tendríamos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. Pero, por otra parte,

$$x_{24}^1 = 3, \quad x_{24}^2 = 1, \quad w_{24} = 4$$

implica que $\alpha_1 = 3/4, \alpha_2 = 1/4$, lo cual es una contradicción.

Problema 1 b, apartado 1: Para esos estados tendríamos que las asignaciones eficientes son $x_s^i = \alpha_i w_s$ para algún $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Como $w_{21} = 4, w_{22} = 8$, asegurarse completamente no puede ser eficiente en $t = 2$. Por el mismo razonamiento tampoco puede ser eficiente asegurarse completamente en $t = 1$.

Problema 1c): Utilizaremos que, en el apartado a), las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha_i w_s$ con $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha_i \pi_s = \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. Las asignaciones de Arrow–Debreu son

$$x_s^i = \alpha_i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \quad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \quad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$\begin{aligned} p_0 &= 1/4 \\ p_{11} &= 1/16, \quad p_{12} = 3/32 \\ p_{21} &= 1/32, \quad p_{22} = 3/64, \quad p_{23} = 1/64, \quad p_{24} = 3/32 \end{aligned}$$

Por tanto, las rentas de los agentes son

$$\begin{aligned} \text{agente 1: } \sum_{s \in S} p_s w_s^1 &= 1 + \frac{1}{16} + \frac{18}{32} + \frac{2}{32} + \frac{15}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{32} = \frac{9}{4} \\ \text{agente 2: } \sum_{s \in S} p_s w_s^2 &= 0 + \frac{3}{16} + \frac{6}{32} + \frac{2}{32} + \frac{9}{64} + \frac{5}{64} + \frac{3}{32} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

de donde, $\alpha_1 = 3/4$, $\alpha_2 = 1/4$ y tenemos las asignaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} x_0^1 &= 3, & x_{11}^1 &= 3, & x_{12}^1 &= 6, & x_{21}^1 &= 3, & x_{22}^1 &= x_{23}^1 = 6, & x_{24}^1 &= 3 \\ x_0^2 &= 1, & x_{11}^2 &= 1, & x_{12}^2 &= 2, & x_{21}^2 &= 1, & x_{22}^2 &= x_{23}^2 = 2, & x_{24}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Problema 2: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: & \quad 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{8} \\ \text{nodo } e_{12}: & \quad 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{16} \\ \text{nodo } e_0: & \quad \frac{1}{8} + \frac{7}{16} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: & \quad \frac{1}{8} / \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{12}: & \quad \frac{7}{16} / \frac{3}{8} = \frac{7}{6} \\ \text{nodo } e_0: & \quad \frac{9}{16} / 1 = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: & \quad 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \\ \text{nodo } e_{12}: & \quad 1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{16} \\ \text{nodo } e_0: & \quad \frac{5}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: & \quad \frac{5}{16} / \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ \text{nodo } e_{12}: & \quad \frac{1}{16} / \frac{3}{8} = \frac{1}{6} \\ \text{nodo } e_0: & \quad \frac{3}{8} / 1 = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_0: & \quad 3 - 4 = -1 \\ \text{nodo } e_{11}: & \quad 3 - 1 = 2 \\ \text{nodo } e_{12}: & \quad 6 - 6 = 0 \\ \text{nodo } e_{21}: & \quad 3 - 2 = 1 \\ \text{nodo } e_{22}: & \quad 6 - 5 = 1 \\ \text{nodo } e_{23}: & \quad 6 - 3 = 3 \\ \text{nodo } e_{24}: & \quad 3 - 3 = 0\end{aligned}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11} , el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22} ,

$$\left. \begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 &= 1 \\ \theta_2 &= 1\end{aligned} \right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 1$. El precio de esta cartera es

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es:

$$2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left. \begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 &= 3 \\ \theta_1 &= 0\end{aligned} \right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 3$. El precio de esta cartera es

$$0 \cdot \frac{7}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{5}{4}\theta_2 &= \frac{13}{14} \\ \frac{7}{6}\theta_1 + \frac{1}{6}\theta_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = 2/33$, $\theta_2 = 85/33$. Resumiendo, la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	$2/33$	$85/33$
e_{11}	0	1
e_{12}	0	3

Problema 3:

(a) Las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 &= 1 \\ Q_1 + 4Q_3 &= 1 \end{aligned}$$

son de la forma

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 - 4Q_3 \\ Q_2 &= 3Q_3 - Q_4 \end{aligned}$$

Como debe verificarse que $0 < Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 < 1$ tenemos que $0 < 1 - 4Q_3 < 1$, es decir,

$$0 < Q_3 < \frac{1}{4}$$

Además, $0 < 3Q_3 - Q_4 < 1$, por lo que

$$3Q_3 - 1 < Q_4 < 3Q_3$$

y hay soluciones estrictamente positivas. Por ejemplo,

$$Q_1 = \frac{5}{9}, \quad Q_2 = \frac{1}{12}, \quad Q_3 = \frac{1}{9}, \quad Q_4 = \frac{1}{4},$$

Los mercados no son completos porque el rango de la matriz de dividendos es 2.

(b) Partimos de la matriz

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 4x_1 \\ x_4 - x_2 \end{matrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 4x_1 + 3x_2 \\ x_4 - x_2 \end{matrix} = 2$$

Por tanto, los activos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ cuyo precio está determinado por los activos r_1 y r_2 y la condición de no arbitraje en la economía, son aquellos que verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_4 - x_2 &= 0 \\ x_3 - 4x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo sería la siguiente: El precio del activo x es

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x_1Q_1 + x_2Q_2 + x_3Q_3 + x_4Q_4 \\ &= x_1(1 - 4Q_3) + x_2(3Q_3 - Q_4) + x_3Q_3 + x_4Q_4 \\ &= x_1 + (x_3 - 4x_1 + 3x_2)Q_3 + (x_4 - x_2)Q_4\end{aligned}$$

y para que $\varphi(x)$ no dependa de los Q_i 's deben verificarse las ecuaciones anteriores.

(c) El precio de r_3 debe ser

$$\varphi(r_3) = 4Q_2 + 4Q_4 = 4(Q_2 + Q_4)$$

pero, en el apartado a) hemos visto que $Q_2 + Q_4 = 3Q_3$, por lo que $\varphi(r_3) = 12Q_3$. Y como $0 < Q_3 < \frac{1}{4}$ tenemos que

$$0 < \varphi(r_3) < 12/4 = 3$$

(d) Las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 &= 1 \\ Q_1 + 4Q_3 &= 1 \\ 4Q_2 + 4Q_4 &= 3\end{aligned}$$

son de la forma

$$Q_1 = 0, \quad Q_3 = \frac{3}{4}, \quad Q_2 + Q_4 = \frac{3}{4}$$

Como $Q_1 = 0$, hay arbitraje en la economía.

Otra forma más sencilla de demostrarlo sería utilizando el apartado anterior, ya que $q_3 = 3$ contradice que $0 < \varphi(r_3) < 1$. Esto sugiere que vender r_3 al corto forma parte de una estrategia de arbitraje. Llamando z_i a la cantidad de activo $i = 1, 2, 3$ que compramos, una estrategia de arbitraje (z_1, z_2, z_3) debe verificar las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 + 3z_3 &\leq 0 \\ z_1 + 4z_3 &\geq 0 \\ z_1 + z_2 &\geq 0 \\ z_1 + 4z_3 &\geq 0\end{aligned}$$

con alguna de las tres últimas desigualdades debe ser estricta. Probando diversos valores vemos que $z_1 = 4$, $z_2 = z_3 = -1$ es una estrategia de arbitraje.

Problema 4: Está hecho en clase.

Problema 5a): Si el agente gasta x unidades monetarias en la lotería entonces su utilidad esperada es

$$V(x) = \pi u(w + P - x) + (1 - \pi)u(w - x)$$

con $\pi = x/P$. Por tanto, su utilidad es

$$V(x) = \frac{x}{P}u(w + P - x) + \left(1 - \frac{x}{P}\right)u(w - x) = \frac{x}{P}u(w + P - x) + \left(\frac{P - x}{P}\right)u(w - x)$$

Podemos utilizar, de manera equivalente, la utilidad (Por abuso de notación utilizamos el mismo nombre)

$$V(x) = xu(w + P - x) + (P - x)u(w - x)$$

La derivada primera de V es

$$V'(x) = u(w + P - x) - xu'(w + P - x) - u(w - x) - (P - x)u'(w - x)$$

y la derivada segunda

$$\begin{aligned} V''(x) &= -u'(w + P - x) - u'(w + P - x) \\ &\quad + xu''(w + P - x) + u'(w - x) + u'(w - x) + (P - x)u''(w - x) \\ &= 2(u'(w - x) - u'(w + P - x)) + xu''(w + P - x) + (P - x)u''(w - x) \end{aligned}$$

Para que $x = 0$ sea una solución debe verificarse que,

$$V'(0) = u(w + P) - u(w) - Pu'(w) \leq 0$$

Esta condición se puede escribir como

$$\frac{u(w + P) - u(w)}{P} \leq u'(w)$$

Si, por ejemplo, $u'' < 0$, entonces se verifica que

$$u'(w) > \frac{u(w + P) - u(w)}{P}$$

y, por tanto, $x = 0$ es un máximo local. También es un máximo global. Ya que, como u es (estríctamente) cóncava, para cualquier $0 < x < P$,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{x}{P}u(w + P - x) + \left(1 - \frac{x}{P}\right)u(w - x) \\ &< u\left(\frac{x}{P}(w + P - x) + \left(1 - \frac{x}{P}\right)(w - x)\right) = u(w) = V(0) \end{aligned}$$

En cambio si $u'' > 0$, entonces

$$u'(w) < \frac{u(w + P) - u(w)}{P}$$

y $x = 0$ no puede ser un máximo local. El agente compra una cantidad positiva de lotería en este caso.

Problema 5b): Como la función de utilidad es estríctamente cóncava, por el apartado a), el agente compraría 0 unidades de lotería.

Otra forma de probar esto, sería la siguiente. La utilidad esperada del agente (después de multiplicar por P) es

$$V(x) = -xe^{-w-P+x} - (P - x)e^{-w+x}$$

La condición de primer orden es

$$\begin{aligned} V'(x) &= -e^{-w-P+x} - xe^{-w-P+x} + e^{-w+x} - (P - x)e^{-w+x} \\ &= e^{-w+x} (-e^{-P} - xe^{-P} + 1 - P + x) = 0 \end{aligned}$$

Como $e^{-w+x} > 0$, entonces

$$-e^{-P} - xe^{-P} + 1 - P + x = 0$$

es decir, V' se anula en el punto

$$x_0 = \frac{e^{-P} + P - 1}{1 - e^{-P}}$$

Por el apartado a), $V'(0) < 0$. Así que $V'(x) < 0$ si $0 \leq x < x_0$ y $V'(x) > 0$ si $x > x_0$. Por tanto, x_0 es un mínimo.

El máximo se alcanza en un punto extremo: 0 ó w . Vemos que

$$V(0) = -Pe^{-w}$$

$$V(w) = -we^{-P} - P + w$$

y el máximo se alcanza en 0, si $we^{-P} + P - w > Pe^{-w}$, ó en w , si se verifica la desigualdad contraria. Para determinar cuál de ellas se verifica consideramos la función

$$f(t) = -te^{-P} - P + t + Pe^{-t}$$

y observamos que

$$f(w) = -we^{-P} - P + w + Pe^{-w} = V(w) - V(0)$$

$$f(P) = -Pe^{-P} - P + P + Pe^{-P} = 0$$

$$f(0) = -P + P = 0$$

Además,

$$f'(t) = -e^{-P} + 1 - Pe^{-t}, \quad f''(t) = Pe^{-t} > 0$$

por tanto f es estrictamente convexa. Suponemos ahora que $0 < w < P$ (Es razonable suponer que el premio de la lotería es mayor que la renta del individuo). Entonces, Como $f(P) = f(0) = 0$, $0 < w < P$ y f es estrictamente convexa, tenemos que $f(w) < f(P) = f(0) = 0$, es decir, el máximo se alcanza en 0.