SOLUCIONES DEL EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV.
FEBRERO 2002.

Problema 1: Supongamos que el agente apuesta la cantidad monetaria x. En este caso, con probabilidad p obtendrá $w + x$ y con probabilidad $1 - p$ obtendrá $w - x$. Por tanto, si apuesta x, su utilidad será

$$U(x) = p \ln(w + x) + (1 - p) \ln(w - x)$$

El agente elige apostar una cantidad monetaria x_0 que maximiza su utilidad. Escribiendo las condiciones de primer orden, obtenemos que

$$U'(x_0) = \frac{p}{w + x_0} - \frac{1 - p}{w - x_0} = 0$$

de donde, despejando y sustituyendo $x_0 = 60$, $w = 100$, obtenemos

$$p = \frac{w + x_0}{2w} = \frac{160}{200} = \frac{4}{5}$$

Problema 2 a: Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha_i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha_i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha_i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha_i w_s.$$

Es decir las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Problema 2 b): Utilizaremos que, en el apartado a), las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha_i w_s$ con $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s\in S} p_s w_s^i = \sum_{s\in S} p_s x_s^i = \sum_{s\in S} \alpha_i \pi_s = \alpha_i \sum_{s\in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s\in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s\in S} \pi_s = 3$. Las asignaciones de Arrow–Debreu son

$$x_s^i = \alpha_i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Las rentas de los agentes son

$$\begin{aligned}
\text{agente 1: } \sum_{s\in S} p_s w_s^1 &= \\
&= \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{8} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{8}\right) = \tfrac{3}{2} \\
\text{agente 2: } \sum_{s\in S} p_s w_s^2 &= \\
&= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{5}{8} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{8}\right) = \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

y tenemos las asignaciones de equilibrio

$$\begin{array}{lllll}
x_0^1 = 4, & x_{11}^1 = x_{12}^1 = 2, & x_{21}^1 = 4, & x_{22}^1 = x_{23}^1 = 2, & x_{24}^1 = 4 \\
x_0^2 = 4, & x_{11}^2 = x_{12}^2 = 2, & x_{21}^2 = 4, & x_{22}^2 = x_{23}^2 = 2, & x_{24}^2 = 4
\end{array}$$

y los precios

$$\begin{gathered}
p_0 = 1/24 \\
p_{11} = p_{12} = 1/24 \\
p_{21} = 1/96, p_{22} = p_{23} = 1/48, \quad p_{24} = 1/96
\end{gathered}$$

Problema 3: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned}
\text{nodo } e_{11}: &\quad 1 \cdot \tfrac{1}{96} + 0 \cdot \tfrac{1}{48} = \tfrac{1}{96} \\
\text{nodo } e_{12}: &\quad 1 \cdot \tfrac{1}{48} + 0 \cdot \tfrac{1}{96} = \tfrac{1}{48} \\
\text{nodo } e_0: &\quad \tfrac{1}{96} + \tfrac{1}{48} = \tfrac{3}{96}
\end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned}
\text{nodo } e_{11}: &\quad \tfrac{1}{96}/\tfrac{1}{24} = \tfrac{1}{4} \\
\text{nodo } e_{12}: &\quad \tfrac{1}{48}/\tfrac{1}{24} = \tfrac{1}{2} \\
\text{nodo } e_0: &\quad \tfrac{3}{96}/\tfrac{1}{24} = \tfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_{11}: & 1 \cdot \frac{1}{48} + 0 \cdot \frac{1}{96} = \frac{1}{48} \\ \text{nodo } e_{12}: & 1 \cdot \frac{1}{96} + 0 \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{96} \\ \text{nodo } e_{0}: & \frac{1}{96} + \frac{1}{48} = \frac{3}{96} \end{array}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_{11}: & \frac{1}{48} / \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{12}: & \frac{1}{96} / \frac{1}{24} = \frac{1}{4} \\ \text{nodo } e_{0}: & \frac{3}{96} / \frac{1}{24} = \frac{3}{4} \end{array}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_{0}: & 4 - 5 = -1 \\ \text{nodo } e_{11}: & 2 - 1 = 1 \\ \text{nodo } e_{12}: & 2 - 3 = -1 \\ \text{nodo } e_{21}: & 4 - 3 = 1 \\ \text{nodo } e_{22}: & 2 - 2 = 0 \\ \text{nodo } e_{23}: & 2 - 1 = 1 \\ \text{nodo } e_{24}: & 4 - 3 = 1 \end{array}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{array}{ll} \theta_1 & = 1 \\ \theta_2 & = 0 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 = 0$. El precio de esta cartera es

$$1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 = 1 \\ \theta_2 = 1 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 = 1$. El precio de esta cartera es

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$-1 + \frac{3}{4} = \frac{-1}{4}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{4}\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{1}{4}\theta_2 = -\frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = -7/3$, $\theta_2 = 11/3$. Resumiendo la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	-7/3	11/3
e_{11}	1	0
e_{12}	1	1

Problema 4:

(a) Las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 &= 1 \\ 2Q_2 + 2Q_3 &= 1 \end{aligned}$$

con $Q_1, Q_2, Q_3 > 0$ son

$$Q_1 = \frac{1}{2}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} - Q_3, \quad 0 < Q_3 < \frac{1}{2}$$

Los mercados no son completos porque la solución no es única.

(b) Como $r_3 = 4r_1 - r_2$ tenemos que

$$q_3 = 4q_1 - q_2 = 3$$

Otra forma sería

$$\varphi(r_3) = 4Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 = 4\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - Q_3\right) + 2Q_3 = 3$$

Como r_3 es combinación lineal de r_1 y r_2, los mercados siguen siendo no completos.

(c) Como

$$\varphi(r_4) = 2Q_1 + 4Q_2 + Q_3 = 3 - 3Q_3$$

con

$$0 < Q_3 < \frac{1}{2}$$

el valor de r_4 verifica

$$\frac{3}{2} < \varphi(r_4) < 3$$

(d) Supongamos que $d = (d_1, d_2, d_3)$. Entonces $\varphi(d) = d_1Q_1 + d_2Q_2 + d_3Q_3 = d_1/2 + d_2(1/2 - Q_3) + d_3Q_3 = d_1/2 + d_2/2 + (d_3 - d_2)Q_3$. Para que este valor no dependa de Q_3 es necesario y suficiente que $d_2 = d_3$. Por lo tanto, los activos que se pide son los activos de la forma $d = (d_1, d_2, d_2)$ con d_1 y d_2 positivos.

Problema 5: Está hecho en clase.

Problema 6: En cada nodo $s = tk$ se verifica que

$$\omega_{tk} + D_{tk} = x_{tk} + C_{tk}$$

donde D_{tk} son los dividendos que la cartera comprada en $t-1$ paga en el nodo e_{tk} y C_{tk} es lo que cuesta la cartera que el agente compra en el nodo e_{tk}.

En $t = 0$ no hay cartera del periodo anterior y la ecuación anterior se reduce a

$$\omega_0 = x_0 + C_0$$

donde

$$D_0 = -4 \cdot 9 + 18 \cdot 2 = 0$$

por lo que

$$\omega_0 = x_0 = \frac{5}{3}$$

En $t = 1$ hay dos nodos. En el nodo e_{11} tenemos que

$$\omega_{11} + D_{11} = x_{11} + C_{11}$$

donde los dividendos de la cartera comprada en $t = 0$ son

$$D_{11} = -4 \cdot 1 + 18 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

mientras que el coste de la cartera que compra en e_{11} es

$$C_{11} = \frac{9}{8} \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

por lo que

$$\omega_{11} = x_{11} + C_{11} - D_{11} = \frac{9}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = 1$$

En el nodo e_{12} tenemos que

$$\omega_{12} + D_{12} = x_{12} + C_{12}$$

donde los dividendos de la cartera comprada en $t = 0$ son

$$D_{12} = -4 \cdot \frac{5}{4} + 18 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

mientras que el coste de la cartera que compra en e_{12} es

$$C_{12} = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{4} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

por lo que

$$\omega_{12} = x_{12} + C_{12} - D_{12} = \frac{9}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 2$$

En $t = 2$ no se compra ninguna cartera y la formula anterior se reduce a

$$\omega_{2k} + D_{2k} = x_{2k}$$

En los nodos e_{21} y e_{22} tenemos que la los dividendos de la cartera comprada en e_{11} son

$$\begin{aligned} D_{21} =& \frac{9}{8} \cdot 1 - 3 \cdot 0 = \frac{9}{8} \\ D_{22} =& \frac{9}{8} \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \omega_{21} =& x_{21} - D_{21} = \frac{9}{8} - \frac{9}{8} = 0 \\ \omega_{22} =& x_{22} - D_{22} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \end{aligned}$$

Finalmente, en los nodos e_{23} y e_{24} tenemos que la los dividendos de la cartera comprada en e_{12} son

$$\begin{aligned} D_{23} =& \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{7}{8} \cdot 1 = \frac{5}{4} \\ D_{24} =& \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{7}{8} \cdot 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \omega_{23} =& x_{23} - D_{23} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1 \\ \omega_{24} =& x_{24} - D_{24} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 \end{aligned}$$