

**SOLUCIONES DEL EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV.
FEBRERO 2001.**

Problema 2: Supongamos que el agente apuesta la cantidad monetaria x . En este caso, con probabilidad p obtendrá $w + x$ y con probabilidad $1 - p$ obtendrá $w - x$. Por tanto, si apuesta x , su utilidad será

$$U(x) = p \ln(w + x) + (1 - p) \ln(w - x)$$

El agente elige apostar una cantidad monetaria x_0 que maximiza su utilidad. Escribiendo las condiciones de primer orden, obtenemos que

$$U'(x_0) = \frac{p}{w + x_0} - \frac{1 - p}{w - x_0} = 0$$

de donde, despejando y sustituyendo $x_0 = 49$, $w = 50$, obtenemos

$$p = \frac{w + x_0}{2w} = \frac{99}{100}$$

Problema 3 a: Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Y resolvemos el sistema

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} \quad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha_i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha_i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha_i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha_i w_s.$$

Es decir las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_I \leq 1, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1.$$

Problema 3 b). Método 1: Recordemos que los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Hemos utilizado que, en el apartado a) las asignaciones eficientes de Pareto son $x_s^i = \alpha_i w_s$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha_i \pi_s = \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{2}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 2$. Las asignaciones de Arrow–Debreu son

$$x_s^i = \alpha_i w_s = \frac{p \cdot w^i}{2} w_s, \quad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \quad s \in S, i \in I.$$

Problema 3 b). Método 2: También podemos plantear el problema de maximización de cada agente $i \in I$,

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i \end{aligned}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \lambda^i \sum_{s \in S} p_s (w_s^i - x_s^i)$$

y las condiciones de primer orden son

$$\frac{\pi_s}{x_s^i} = \lambda^i p_s \quad s \in S$$

de donde

$$\pi_s = \lambda^i p_s x_s^i$$

y sumando para $s \in S$ y teniendo en cuenta la restricción presupuestaria del agente $i \in I$,

$$\sum_{s \in S} \pi_s = \lambda^i \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \lambda^i \sum_{s \in S} p_s w_s^i$$

por lo que

$$\lambda^i = \frac{2}{p \cdot w^i}.$$

Sustituyendo en las condiciones de primer orden, obtenemos que

$$x_s^i = \frac{\pi_s}{\lambda^i p_s} = \frac{\pi_s}{p_s} \frac{p \cdot w^i}{2}.$$

Ahora imponemos la condición de vaciado de mercado y queda, para cada estado $s \in S$,

$$w_s = \sum_{i \in I} x_s^i = \frac{\pi_s}{p_s} \frac{\sum_{i \in I} p \cdot w^i}{2}$$

por lo que

$$\frac{w_s p_s}{\pi_s} = \frac{\sum_{i \in I} p \cdot w^i}{2}$$

para todo estado $s \in S$, es decir, la condición sobre los precios es que

$$\frac{w_1 p_1}{\pi_1} = \frac{w_2 p_2}{\pi_2} = \dots = \frac{w_S p_S}{\pi_S}$$

vemos que una solución es tomar

$$p_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

por lo que

$$x_s^i = \frac{p \cdot w^i}{2} w_s$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Las rentas de los agentes son

$$\begin{aligned} \text{agente 1: } \quad & \sum_{s \in S} p_s w_s^1 = \frac{9}{8} \\ \text{agente 2: } \quad & \sum_{s \in S} p_s w_s^2 = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

y tenemos las asignaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} x_{11}^1 = x_{12}^1 &= x_{21}^1 = \frac{9}{8} & x_{22}^1 = x_{23}^1 = x_{24}^1 &= \frac{9}{4} \\ x_{11}^2 = x_{12}^2 &= x_{21}^2 = \frac{7}{8} & x_{22}^2 = x_{23}^2 = x_{24}^2 &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

y los precios

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{12} = \frac{1}{4} \\ p_{21} &= \frac{1}{8} \quad p_{22} = p_{23} = p_{24} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Problema 4: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: \quad & 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & 3 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: \quad & \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & \frac{\frac{5}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: \quad & 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & 1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: \quad & \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_{11}: \quad & 9/8 - 1 = 1/8 \\ \text{nodo } e_{12}: \quad & 9/8 - 2 = -7/8 \\ \text{nodo } e_{21}: \quad & 9/8 - 0 = 9/8 \\ \text{nodo } e_{22}: \quad & 9/4 - 3 = -3/4 \\ \text{nodo } e_{23}: \quad & 9/4 - 1 = 5/4 \\ \text{nodo } e_{24}: \quad & 9/4 - 2 = 1/4\end{aligned}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2 de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22} ,

$$\left. \begin{aligned}\theta_1 &= 9/8 \\ 2\theta_1 + \theta_2 &= -3/4\end{aligned} \right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 9/8$ y $\theta_2 = -3$. El precio de esta cartera es

$$\frac{9}{8} - 3\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left. \begin{aligned}3\theta_1 + \theta_2 &= 5/4 \\ 2\theta_1 &= 1/4\end{aligned} \right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 1/8$ y $\theta_2 = 7/8$. El precio de esta cartera es

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$-\frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{-1}{2}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left. \begin{aligned}\theta_1 + \frac{1}{4}\theta_2 &= \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4}\theta_1 + \frac{1}{4}\theta_2 &= \frac{-1}{2}\end{aligned} \right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = -4$, $\theta_2 = 18$. Resumiendo la cartera del activo 1 del agente 1 es

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_0: & -4 \\ \text{nodo } e_{11}: & 9/8 \\ \text{nodo } e_{12}: & 1/8\end{aligned}$$

mientras que la cartera del activo 2 para el agente 1 es

$$\begin{aligned}\text{nodo } e_0: & 18 \\ \text{nodo } e_{11}: & -3 \\ \text{nodo } e_{12}: & 7/8\end{aligned}$$

Problema 5:

- (a) Como el rango de R es 2 y hay 3 estados, los mercados no son completos. Las probabilidades de riesgo neutro son las soluciones positivas del sistema

$$\begin{aligned}Q_1 + Q_2 + Q_3 &= 1 \\ 3Q_2 + 3Q_3 &= 2\end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $Q_2 + Q_3 = 2/3$, por lo que, sustituyendo en la primera ecuación vemos que $Q_1 = 1 - (Q_2 + Q_3) = 1 - 2/3 = 1/3$. Imponiendo ahora que $0 < Q_2 = 2/3 - Q_3 < 1$, obtenemos las soluciones

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{1}{3} \\ Q_2 &= \frac{2}{3} - Q_3 \\ 0 < Q_3 &< \frac{2}{3}\end{aligned}$$

de donde deduce que no hay arbitraje.

- (b) Como no hay arbitraje, $q_3 = \varphi(r_3) = 4Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4/3 + 2/3 - Q_3 + Q_3 = 2$.

Otra forma de hacerlo sería observando que $r_3 = 4r_1 - r_2$, por lo que $q_3 = 4q_1 - q_2 = 4 - 2 = 2$.

- (c) Para que no haya arbitraje, $q_4 = \varphi(r_4) = 3Q_1 + 3Q_2 + 3Q_3 = 3(1/3) + 3(2/3 - Q_3) + 3Q_3 = 3 - 2Q_3$. Hemos visto en el apartado a) que $0 < Q_3 < 2/3$, por lo que $5/3 = 3 - 2(2/3) < q_4 < 3$ son los precios de r_4 compatibles con que no haya arbitraje.
- (d) Supongamos que $d = (d_1, d_2, d_3)$. Entonces $\varphi(d) = d_1Q_1 + d_2Q_2 + d_3Q_3 = d_1/3 + d_2(2/3 - Q_3) + d_3Q_3 = d_1/3 + 2d_2/3 + (d_3 - d_2)Q_3$. Para que este valor no dependa de Q_3 es necesario y suficiente que $d_2 = d_3$. Por lo tanto, los activos que se pide son los activos de la forma $d = (d_1, d_2, d_2)$ con d_1 y d_2 positivos.

Problema 6: En primer lugar, como $r_1 = (1, 1, \dots, 1)$ y $1 = q_1 = \sum_{s=1}^S Q_s r_{s1}$ tenemos que $\sum_{s=1}^S Q_s = 1$.

Fijamos un activo $k = 1, 2, \dots, K$. Para cada estado $s = 1, 2, \dots, S$, tenemos que $r_{sk} \geq \underline{r_k}$, por lo que

$$q_k = \sum_{s=1}^S Q_s r_{sk} \geq \sum_{s=1}^S Q_s \underline{r_k} = \underline{r_k} \sum_{s=1}^S Q_s = \underline{r_k}.$$

Análogamente, para cada estado $s = 1, 2, \dots, S$, tenemos que $r_{sk} \leq \overline{r_k}$, por lo que

$$q_k = \sum_{s=1}^S Q_s r_{sk} \leq \sum_{s=1}^S Q_s \overline{r_k} = \overline{r_k} \sum_{s=1}^S Q_s = \overline{r_k}.$$