EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV
10 DE SEPTIEMBRE DE 2004

1. **(2 puntos)**
Consideremos la economía secuencial de la figura 1 con dos agentes y un bien. Cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

$$u^i(x) = \sum_s \pi_s \ln x_s^i$$

a) Determinar las asignaciones que son Pareto eficientes.
Supongamos que en un asignación Pareto eficiente se verifica que

$$x_{21}^1 = 1/2, \qquad x_{21}^2 = 7/2$$

Determinar x_{11}^1, x_{11}^2 en esa asignación.

b) Determinar las asignaciones y los precios de equilibrio suponiendo que los mercados son del tipo Arrow–Debreu.
¿Cuánto valen x_{21}^1, x_{21}^2?

Solución:

a) Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha_i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha_i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha_i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha_i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha_i w_s \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

En la asignación Pareto eficiente se verifica que

$$x_{21}^1 = \frac{1}{2} = 4\alpha_1$$
$$x_{21}^2 = \frac{7}{2} = 4\alpha_2$$

por lo que

$$\alpha_1 = \frac{1}{8}, \qquad \alpha_2 = \frac{7}{8}$$

y obtenemos

$$x_{11}^1 = 8\alpha_1 = 1, \qquad x_{11}^2 = 8\alpha_2 = 7$$

b) Utilizaremos que, en el apartado a), las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha_i w_s$ con $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.
Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha_i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha_i \pi_s = \alpha_i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. Las asignaciones de Arrow–Debreu son

$$x_s^i = \alpha_i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$p_0 = \tfrac{1}{4}$$
$$p_{11} = \tfrac{1}{16}, \quad p_{12} = \tfrac{1}{8}$$
$$p_{21} = \tfrac{1}{16}, \quad p_{22} = \tfrac{3}{64}, \quad p_{23} = \tfrac{1}{64}, \quad p_{24} = \tfrac{1}{16}$$

Por tanto, las rentas de los agentes son

$$\text{agente 1: } \sum_{s \in S} p_s w_s^1 = 3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{16} + 4\frac{1}{8} + 3\frac{1}{16} + 5\frac{3}{64} + 5\frac{1}{64} + 3\frac{1}{16} = \frac{9}{4}$$
$$\text{agente 2: } \sum_{s \in S} p_s w_s^2 = 1\frac{1}{4} + 3\frac{1}{16} + 0\frac{1}{8} + 1\frac{1}{16} + 3\frac{3}{64} + 3\frac{1}{64} + 1\frac{1}{16} = \frac{3}{4}$$

de donde, $\alpha_1 = 3/4$, $\alpha_2 = 1/4$ y tenemos las asignaciones de equilibrio

$$x_0^1 = 3, \quad x_{11}^1 = 6, \quad x_{12}^1 = 3, \quad x_{21}^1 = 3, \quad x_{22}^1 = 6, \quad x_{23}^1 = 6, \quad x_{24}^1 = 3$$
$$x_0^2 = 1, \quad x_{11}^2 = 2, \quad x_{12}^2 = 1, \quad x_{21}^2 = 1, \quad x_{22}^2 = 2, \quad x_{23}^2 = 2, \quad x_{24}^2 = 1$$

2. **(2 puntos)**
Supongamos que las figuras 2, 3 y 4 representan las asignaciones iniciales, los consumos y los precios de equilibrio de una economía secuencial Arrow–Debreu con dos agentes y un bien. Supongamos que restringimos los mercados a una economía de Radner en la que sólo hay mercados para los activos siguientes

	r_1	r_2
e_{21}	1	2
e_{22}	2	1
e_{23}	0	2
e_{24}	2	1

Suponiendo que los mercados son dinámicamente completos, determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.

Solución: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}&: \quad \tfrac{1}{8} + 2 \cdot \tfrac{3}{16} = \tfrac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{12}&: \quad 0 \cdot \tfrac{1}{16} + 2 \cdot \tfrac{3}{8} = \tfrac{3}{4} \\ \text{nodo } e_{0}&: \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}&: \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \\ \text{nodo } e_{12}&: \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = 2 \\ \text{nodo } e_{0}&: \quad \frac{\frac{5}{4}}{1} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}&: \quad 2 \cdot \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{16} = \tfrac{7}{16} \\ \text{nodo } e_{12}&: \quad 2 \cdot \tfrac{1}{16} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{0}&: \quad \tfrac{7}{16} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{15}{16} \end{aligned}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}&: \quad \frac{\frac{7}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{4} \\ \text{nodo } e_{12}&: \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{4}{3} \\ \text{nodo } e_{0}&: \quad \frac{\frac{15}{16}}{1} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$
\begin{aligned}
\text{nodo } e_0&: \quad 3-3=0\\
\text{nodo } e_{11}&: \quad 3-5=-2\\
\text{nodo } e_{12}&: \quad 6-4=2\\
\text{nodo } e_{21}&: \quad 3-3=0\\
\text{nodo } e_{22}&: \quad 6-5=1\\
\text{nodo } e_{23}&: \quad 6-5=1\\
\text{nodo } e_{24}&: \quad 3-3=0
\end{aligned}
$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 + 2\theta_2 &= 0\\ 2\theta_1 + \theta_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 2/3$ y $\theta_2 = -1/3$. El precio de esta cartera es

$$2\cdot\frac{2}{3} - \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es:

$$-2 + \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{aligned} 2\theta_2 &= 1\\ 2\theta_1 + \theta_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -1/4$ y $\theta_2 = \frac{1}{2}$. El precio de esta cartera es

$$-2\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{aligned} 2\theta_1 + \tfrac{7}{4}\theta_2 &= -\tfrac{5}{4}\\ 2\theta_1 + \tfrac{4}{3}\theta_2 &= \tfrac{13}{6} \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = 131/20$, $\theta_2 = -41/5$. Resumiendo, la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	131/20	-41/5
e_{11}	2/3	-1/3
e_{12}	-1/4	1/2

3. **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con un bien, dos periodos y tres estados posibles en el segundo periodo. Supongamos que hay tres activos $r_1 = (1, 1, 1)$ y $r_2 = (2, 3, 0)$ y $r_3 = (3, 2, 5)$ cuyos precios son $q_1 = 1$, $q_2 = 2$ y $q_3 = 3$.
   a) Calcular unas medidas de precios de equilibrio (probabilidades de riesgo neutro). Determinar si hay arbitraje en la economía. ¿Son completos los mercados?
   b) Determinar el conjunto de activos cuyo precio está determinado de forma única por los precios q_1, q_2 y q_3 de los activos r_1, r_2, r_3 y la condición de no arbitraje en la economía. Encontrar una ecuación que caracterice ese conjunto.
   c) Se introduce un nuevo activo $r_4 = (1, 4, 4)$. ¿Qué valoraciones de este activo son compatibles con la no existencia de arbitraje en la economía?
   d) Suponiendo que el precio del nuevo activo $r_4 = (1, 4, 4)$ es $q_4 = 3$, encontrar una estrategia de arbitraje.

Solución:

a) Las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 &= 1 \\ 2Q_1 + 3Q_2 &= 2 \\ 3Q_1 + 2Q_2 + 5Q_3 &= 3 \end{aligned}$$

son de la forma

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 - 3Q_3 \\ Q_2 &= 2Q_3 \\ 0 < Q_3 &< 1 \end{aligned}$$

Vemos que hay soluciones estrictamente positivas. Por ejemplo, $Q_1 = 1/2$, $Q_2 = 1/3$, $Q_3 = 1/6$. Los mercados no son completos porque el rango de la matriz de dividendos es 2.

b) Partimos de la matriz

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 1 & 3 & 2 & x_2 \\ 1 & 0 & 5 & x_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -2 & 2 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + 2(x_2 - x_1) \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, los activos $x = (x_1, x_2, x_3)$ cuyo precio está determinado por los activos r_1 y r_2 y la condición de no arbitraje en la economía, son aquellos que verifican la ecuación

$$x_3 + 2x_2 - 3x_1 = 0$$

Otra forma de hacerlo sería la siguiente: El precio del activo x es

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + x_3 Q_3 \\ &= x_1(1 - Q_3) + 2x_2 Q_3 + x_3 Q_3 \\ &= x_1 + (x_3 + 2x_2 - 3x_1) Q_3 \end{aligned}$$

y para que $\varphi(x)$ no dependa de los Q_i's debe verificarse la ecuación anterior.

c) El precio de r_4 debe ser

$$\varphi(r_4) = Q_1 + 4Q_2 + 4Q_3 = 1 - Q_3 + 8Q_3 + 4Q - 3 = 1 + 9Q_3$$

Como, $0 < Q_3 < 1$ tenemos que

$$1 < \varphi(r_4) < 1 + 9/3 = 4$$

d) No hay ninguna estrategia de arbitraje, ya que el nuevo precio es compatible con el rango encontrado en el apartado anterior.

4. **(1 punto)**
Consideremos una economía secuencial con dos periodos, y agentes con preferencias de la forma $u^i(x^i) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s v_s(x_s^i)$ (las probabilidades de los estados son las mismas para todos los agentes). Supongamos que en equilibrio de Arrow–Debreu el consumo de los agentes es el mismo en todos los estados del periodo $t = 1$. Probar que los precios del equilibrio de Arrow–Debreu son $p_s = \pi_s$ para cada estado $s = 1, 2, \ldots, S$.

5. **(2 puntos)**

Un agente con una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern sobre dinero $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable dos veces es averso al riesgo ($u'' < 0$). El agente organiza una fiesta. La recaudación depende del tiempo que hará ese día. Si no llueve la recaudación será de y euros, mientras que si llueve será de z euros (suponemos $z < y$). La probabilidad de que llueva es p. Una compañía de seguros le ofrece un seguro con cobertura parcial: El agente paga una cantidad qx por el seguro y la compañía le paga la cantidad $(y - z)x$ si (y sólo si) llueve.

a) Probar que el agente elige un seguro completo $x = 1$ si el precio del seguro es actuarialmente justo, es decir si $q = p(y - z)$.

b) Probar que si el precio del seguro no es actuarialmente justo, es decir si $q > p(y - z)$ entonces el agente elige asegurarse sólo parcialmente $x < 1$.

Solución:

a) La función utilidad esperada del agente es

$$V(x) = pu(z - qx + (y - z)x) + (1 - p)u(y - qx)$$

donde x es la cantidad de seguro que compra. La condición de primer orden es

$$V'(x) = p(y - z - q)u'(z - qx + (y - z)x) - (1 - p)qu'(y - qx) = 0$$

es decir

$$p(y - z - q)u'(z - qx + (y - z)x) = (1 - p)qu'(y - qx)$$

Como, $q = p(y - z)$ tenemos que

$$y - z - q = (1 - p)(y - z)$$

por lo que la condición de primer orden es equivalente a

$$p(1 - p)(y - z)u'(z - qx + (y - z)x) = (1 - p)p(y - z)u'(y - qx) = 0$$

Y como $0 < p < 1$ y $z < y$, esta ecuación es equivalente a

$$u'(z - qx + (y - z)x) = u'(y - qx) = 0$$

Como la función es estrictamente cóncava, tenemos que u' es estrictamente decreciente y debe verificarse que

$$z - qx + (y - z)x = y - qx$$

es decir,

$$x = 1$$

b) Supongamos ahora que $q > p(y-z)$. Entonces,

$$y - z - q < y - z - p(y-z) = (1-p)(y-z)$$

Y, de la condición de primer orden,

$$(1-p)qu'(y-qx) = p(y-z-q)u'(z-qx+(y-z)x)$$

obtenemos

$$(1-p)p(y-z)u'(y-qx)(1-p)p(y-z) < u'(z-qx+(y-z)x)$$

(ya que $p(y-z) < q$ y $y-z-q < (1-p)(y-z)$).
Es decir,

$$u'(y-qx) < u'(z-qx+(y-z)x)$$

Y como u' es estrictamente decreciente, debe verificarse que

$$z - qx + (y-z)x < y - qx$$

es decir,

$$(y-z)x < y-z$$

por lo que

$$x < 1$$

6. **(1 punto)** Supongamos un agente averso al riesgo con una función de utilizada $u(x)$ sobre cantidades monetarias y una renta inicial w. Dada una lotería F se define la prima de riesgo, para el agente u, como el número $\pi_u(F,w)$ definido por la ecuación

$$u(w-\pi_u(F,w)) = \int_{\mathbb{R}} u(w+z)\,dF(z)$$

Probar que si otro agente con una función de utilidad v(x) sobre cantidades monetarias es más averso al riesgo que u (utilizando el coeficiente de aversión absoluta al riesgo), entonces $\pi_v(F,w) > \pi_u(F,w)$ para toda lotería F y para toda cantidad monetaria w.

Como v es más averso al riesgo que u, podemos encontrar una función g, cóncava, creciente y tal que $v(x) = g(u(x))$. Dada una lotería F y una cantidad monetaria w se verifica que

$$\begin{aligned}
v(w-\pi_v(F,w)) &= \int_{\mathbb{R}} v(w+z)\,dF(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(u(w+z))\,dF(z) \quad \text{(desigualdad de Jensen))} \\
&< g\left(\int_{\mathbb{R}} (u(w+z))\,dF(z)\right) \\
&= g\left(u(w-\pi_u(F,w))\right) \\
&= v(w-\pi_u(F,w))
\end{aligned}$$

y como v es creciente debe verificarse que $w-\pi_v(F,w) < w-\pi_u(F,w)$, es decir $\pi_u(F,w) < \pi_v(F,w)$.

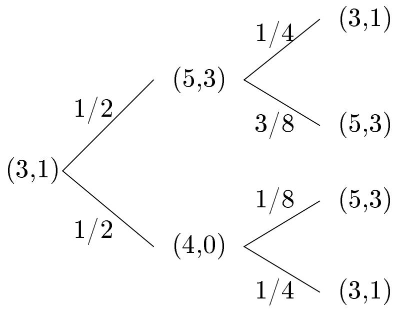

FIGURA 1. Recursos iniciales y π_s en el problema 1.

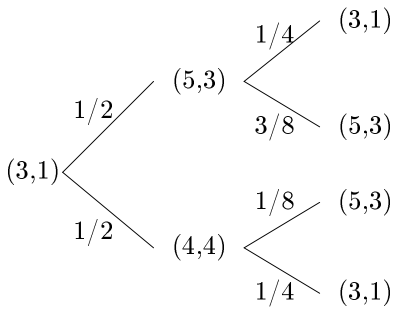

FIGURA 2. Recursos iniciales de los agentes en el problema 2.

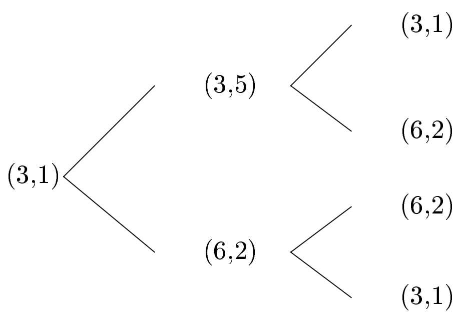

FIGURA 3. Consumos de los agentes en el problema 2.

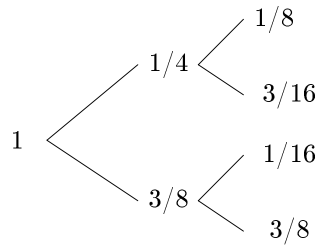

Figura 4. Precios del bien en el problema 2.