EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV

19 de Enero 2015

1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Apellidos: **Nombre:**

(1) **(2 puntos)**
Las funciones de utilidad de los agentes son

$$u_1(x, y) = \ln(x) + \ln(y), \quad u_2(x, y) = \ln(x) + 3\ln(y)$$

y los recursos iniciales son

$$\omega^1 = (2, 8), \quad \omega^2 = (4, 6)$$

(a) *Calcular las asignaciones Pareto Eficientes.*

Solución: Las relaciones marginales de sustitución son

$$\text{MRS}_1 = \frac{y}{x} \quad \text{MRS}_2 = \frac{y}{3x}$$

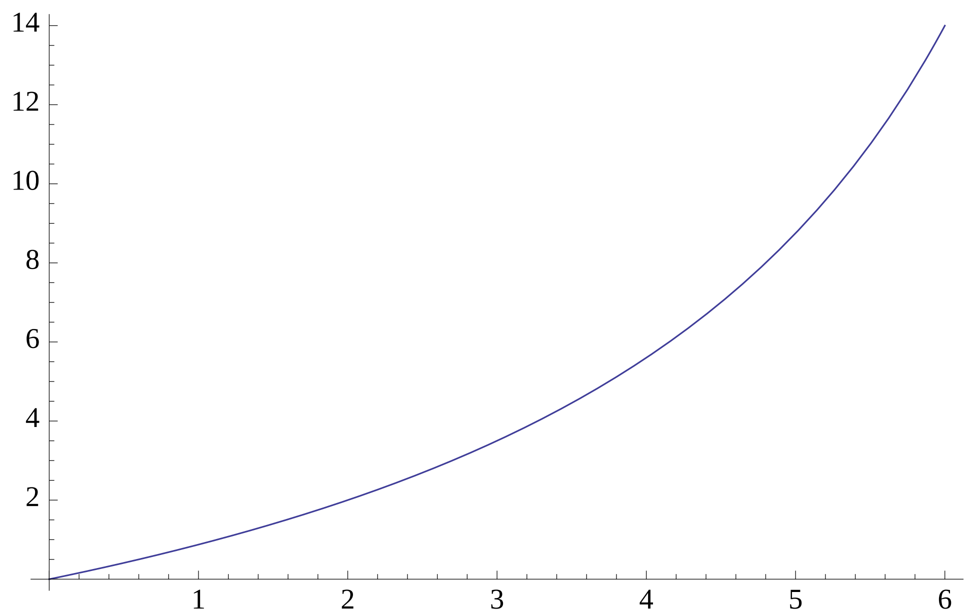
por lo tanto, si una asignación (x, y) para el agente 1 es Pareto eficiente debe verificar que

$$\frac{y}{x} = \frac{14 - y}{3(6 - x)}$$

es decir,

$$y = \frac{7x}{x - 9}, \quad 0 \le x \le 6$$

Gráficamente,



(b) *Calcular las funciones de demanda de los agentes.*

Solución:
Utilizamos que

$$\text{MRS}_i = \frac{p_1}{p_2}, \quad i = 1, 2$$

y las restricciones presupuestarias. Para el agente 1 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x + p_2 y &= z_1 = 2p_1 + 8p_2 \end{aligned}$$

La demanda del agente 1 es

$$\begin{aligned} x^1 &= 1 + \frac{4p_2}{p_1} \\ y^1 &= 4 + \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

Para el agente 2 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{y}{3x} &= \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x + p_2 y &= z_2 = 4p_1 + 6p_2 \end{aligned}$$

La demanda del agente 1 es

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + \frac{3p_2}{2p_1} \\ y^2 &= \frac{9}{2} + \frac{3p_1}{2p_2} \end{aligned}$$

(c) *Calcular el equilibrio competitivo de la Economía.*

Solución: La condición de que los mercados se vacían es

$$\begin{aligned} 6 &= x^1 + x^2 \\ 14 &= y^1 + y^2 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{11}{8}$$

Elegimos los precios $p_1 = 11$, $p_2 = 8$. Las asignaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned} (x^1, y^1) &= \left(\frac{43}{11}, \frac{43}{8}, \right) \\ (x^2, y^2) &= \left(\frac{23}{11}, \frac{69}{8}, \right) \end{aligned}$$

(d) *Tras una redistribución de los recursos iniciales $\bar{\omega}^1 = (a_1, b_1)$, $\bar{\omega}^2 = (a_2, b_2)$, los nuevos precio de equilibrio son $p_1 = p_2 = 1$. Calcule $\bar{\omega}^1$ y $\bar{\omega}^2$.*

Solución: Sea (x^1, y^1) el consumo del agente 1 en la la asignación de equilibrio. Debe verificarse que

$$\frac{y^1}{x^1} = \frac{p_1}{p_2} = 1$$

por lo que $y^1 = x^1$. Como además es Pareto eficiente, se verifica que

$$x^1 = y^1 = \frac{7x^1}{x^1 - 9}$$

es decir, $x^1 = y^1 = 2$. Para que esta asignación sea factible para el agente 1 debe verificarse la restricción presupuestaria de este agente, con los precios de equilibrio. Es decir, $4 = a_1 + b_1$. Por lo tanto, con cualquier reparto de los recursos iniciales en el que el agente 1 recibe los recursos $\bar{\omega}^1 = (a, 4 - a)$ y el agente 2 recibe $\bar{\omega}^2 = (6-a, 10+a)$, on $0 \leq a \leq 4$, da lugar al equilibrio competitivo con precios $p_1 = p_2 = 1$.

---

(2) **(2 puntos)** *Supongamos que en el futuro hay dos estados posibles que ocurren con probabilidades $1/3$ y $2/3$ y que el agente puede elegir entre dos activos, $r_1 = (5, 5)$ y $r_2 = (7, 3)$. Los precios de los activos son, respectivamente $q_1 = q_2 = 1$. La riqueza inicial del agente es w. Llamamos α a la cantidad de unidades del activo r_2 que compraría el agente. La función de utilidad del agente es $v(x) = x^r$, con $0 < r < 1$.*

(a) *Calcular la cantidad, α, de unidades del activo r_2 que compraría el agente.*

Solución: Sea β la cantidad de activo r_1 comprada por el agente. La restricción presupuestaria es $\alpha + \beta = w$, por lo que $\beta = w - \alpha$. Por lo tanto la cartera del agente es

$$(w-\alpha)(5,5) + \alpha(7,3) = (5w + 2\alpha, 5w - 2\alpha)$$

y su utilidad esperada con esta cartera es

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\left(5w + 2\alpha\right)^r + \frac{2}{3}\left(5w - 2\alpha\right)^r$$

Observamos que

$$V'(\alpha) = \frac{2}{3} r\left(5w + 2\alpha\right)^{r-1} - \frac{4}{3} r\left(5w - 2\alpha\right)^{r-1}$$

por lo que $V'(\alpha) = 0$ si y sólo si

$$\alpha = \frac{5\left(2^{\frac{1}{r-1}} - 1\right)}{2\left(2^{\frac{1}{r-1}} + 1\right)} w < 0$$

es decir la solución de

$$\max_{0 \le \alpha \le w} V(\alpha)$$

se alcanza para $\alpha^* = 0$.

(b) *¿Cómo cambia α al variar la renta inicial w del agente? ¿Cómo cambia α al variar la renta inicial r?*

Solución: Como $\alpha^* = 0$, no depende de w ni de r.

(c) *Calcule los coeficientes de aversión absoluta y relativa al riesgo? Explique los resultados del apartado anterior en términos de aversión al riesgo.*

Solución: El coeficiente de aversión absoluta al riesgo es

$$\frac{r-1}{x}$$

El coeficiente de aversión relativa al riesgo es $r-1$. El agente es averso al riesgo. Para todo $\alpha \ge 0$ el valor esperado de la lotería $L(\alpha)$ que paga $5w + 2\alpha$ con probabilidad $1/3$ y $5w - 2\alpha$ con probabilidad $2/3$ es

$$E\left[L(\alpha\right] = \frac{1}{3}(5w+2) + \frac{2}{3}(5w-2) = 5w - \frac{2\alpha}{3} < 5w$$

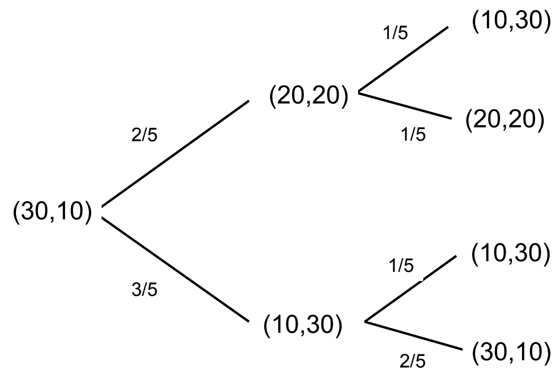
por lo que la lotería segura de obtener $E\left[L(0\right] = 5w$ (es decir, utilizar toda la renta en comprar sólo el áctivo r_1) es preferida a la lotería $L(\alpha)$. Por lo tanto, el agente no compra nada del activo r_2.

---

(3) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con dos agentes, un bien y en la que cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

$$u^i(x) = \sum_s \pi_s \ln x_s$$

Los π_s y los recursos de los agentes están representados en la figura siguiente ($\pi_0 = 1$),



(a) *Determinar todas las asignaciones Pareto eficientes. Supongamos que en una determinada asignación Pareto eficiente, x_s^i, se verifica que $x_{21}^2 = 10$. Determinar el consumo x_{11}^1 en esa asignación.*

Solución: Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $I = \{1, 2\}$, $0 \leq \alpha^1, \ldots, \alpha^I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha^i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha^i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha^i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha^i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha^i w_s, \quad i = 1, 2 \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1, \quad \alpha^1 + \alpha^2 = 1.$$

En la asignación Pareto eficiente se verifica que $x_{21}^2 = 10$, por lo que

$$\alpha^2 = \frac{x_{21}^2}{w_{21}^1 + w_{21}^2} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

de donde

$$\alpha^1 = 1 - \alpha^2 = \frac{3}{4}$$

Ahora calculamos

$$x_{11}^1 = \alpha^1 (w_{11}^1 + w_{11}^2) = 30$$

(b) *Determinar el equilibrio de Arrow–Debreu.*

Solución:

Utilizaremos que, en el apartado anterior, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma $x_s^i = \alpha^i w_s$ con $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$.

Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha^i \pi_s = \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha^i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. El equilibrio de Arrow–Debreu es

$$x_s^i = \alpha^i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$p_0 = 1$$
$$p_{11} = \tfrac{2}{5}, \quad p_{12} = \tfrac{3}{5}$$
$$p_{21} = \tfrac{1}{5}, \quad p_{22} = \tfrac{1}{5}, \quad p_{23} = \tfrac{1}{5}, \quad p_{24} = \tfrac{2}{5}$$

Por tanto, la renta del agente 1 es

$$p \cdot w^1 = \sum_{s \in S} p_s w_s^2 = 1 \times 30 + 20\frac{2}{5} + 10\frac{3}{5} + 10\frac{1}{5} + 20\frac{1}{5} + 10\frac{1}{5} + 30\frac{2}{5} = \frac{23}{15}$$

por lo que

$$\alpha^1 = \frac{8}{15}$$

y

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{7}{15}.$$

Finalmente las asignaciones de equilibrio son

$$x_s^1 = \frac{64}{3}, \quad x_s^2 = \frac{56}{3}$$

---

(4) **(2 puntos)**

Consideremos la economía del problema anterior de Radner con dos agentes, dos activos y un bien. Los dividendos de los activos son,

	r_1	r_2
e_{21}	1	1
e_{22}	1	0
e_{23}	2	1
e_{24}	1	2

Supongamos que los mercados son dinámicamente completos.

(a) *Determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.*

Solución:

En primer lugar, vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

nodo e_0: $\frac{3}{100}$
nodo e_{11}: $\frac{1}{100}$
nodo e_{12}: $\frac{1}{50}$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{array}{rc} \text{nodo } e_0: & \frac{6}{5} \\ \text{nodo } e_{11}: & 1 \\ \text{nodo } e_{12}: & \frac{4}{3} \end{array}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{array}{rc} \text{nodo } e_0: & \frac{3}{100} \\ \text{nodo } e_{11}: & \frac{1}{200} \\ \text{nodo } e_{12}: & \frac{1}{40} \end{array}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{array}{rc} \text{nodo } e_0: & \frac{6}{5} \\ \text{nodo } e_{11}: & \frac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{12}: & \frac{5}{3} \end{array}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{array}{rc} \text{nodo } e_0: & -\frac{26}{3} \\ \text{nodo } e_{11}: & \frac{4}{3} \\ \text{nodo } e_{12}: & \frac{34}{3} \\ \text{nodo } e_{21}: & \frac{34}{3} \\ \text{nodo } e_{22}: & \frac{4}{3} \\ \text{nodo } e_{23}: & \frac{34}{3} \\ \text{nodo } e_{24}: & -\frac{26}{3} \end{array}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.
En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta_1 + \theta_2 & = & \frac{34}{3} \\ \theta_1 & = & \frac{4}{3} \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = \frac{4}{3}$ y $\theta_2 = 10$. El precio de esta cartera es

$$\frac{4}{3} \times 1 + 10 \times \frac{1}{2} = \frac{19}{3}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es

$$\frac{4}{3} + \frac{19}{3} = \frac{23}{3}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{array}{r} 2\theta_1 + \theta_2 = \frac{34}{3} \\ \theta_1 + 2\theta_2 = -\frac{26}{3} \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = \frac{94}{9}$ y $\theta_2 = -\frac{86}{9}$. El precio de esta cartera es $\frac{94}{9} \times \frac{4}{3} - \frac{86}{9} \times \frac{5}{3} = -2$. Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es: $\frac{34}{3} - 2 = \frac{28}{3}$. Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{array}{r} \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 = \frac{23}{3} \\ \frac{4}{3}\theta_1 + \frac{5}{3}\theta_2 = \frac{28}{3} \end{array}\right\}$$

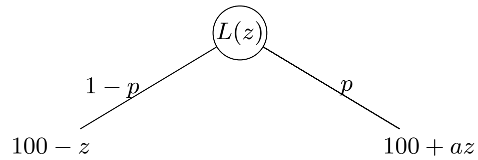
cuya solución es $\theta_1 = \frac{73}{9}$, $\theta_2 = -\frac{8}{9}$.

(5) (**2 puntos**)

(a) *Escriba las definiciones de dominancia estocástica de primer y de segundo orden.*

Solución: Notas de clase

(b) *Sea* $L(z)$ *la lotería*



con

$$0 \le z \le 100, \quad p \le \frac{1}{2} \quad y \quad a = \frac{1-p}{p}$$

Probar que si $0 \le z_1 < z_2 \le 100$, *un agente averso al riesgo prefiere la lotería* $L(z_1)$ *a* $L(z_2)$.

Solución: En primer lugar observamos que el valor esperado de todas las loterías es

$$E[L(z(] = (1-p)(100-a) + p(100+az) = 100 + z(p+ap-1) = 100$$

Vamos a demostrar que si $0 \le z_1 < z_2 \le 100$ entonces la lotería $L(z_1)$ domina estocásticamente de segundo orden a la lotería $L(z_2)$. La función de distribución de $L(z)$ es

$$G(x;z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 100-z \\ 1-p & \text{si } 100-z \le x < 100+az \\ 1 & \text{si } 100+az \le x < \end{cases}$$

Ahora definimos

$$H(t;z) = \int_0^t G(x;z)\,dx, \quad t \ge 0$$

Es decir,

$$H(t;z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 100-z \\ (1-p)(t+z-100) & \text{si } 100-z \le x < 100+az \\ t+z-pz-apz-100 & \text{si } 100+az \le x < \end{cases}$$

Y teniendo en cuenta que $ap+p=1$, vemos que

$$t+z-pz-apz-100 = t+z-z(p+ap)-100 = t-100$$

por lo que

$$H(t;z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 100-z \\ (1-p)(t+z-100) & \text{si } 100-z \le x < 100+az \\ t-100 & \text{si } 100+az \le x < \end{cases}$$

Recordemos que la lotería $L(z_1)$ domina estocásticamente de segundo orden a la lotería $L(z_2)$ si y sólo si $H(t;z_1) \le H(t;z_2)$ para todo $t \ge 0$. Supongamos que $0 \le z_1 < z_2 \le 100$. Entonces

$$100-z_2 < 100-z_1 < 100+az_1 < 100+az_2$$

En primer lugar, si $100-z_2 \le t \le 100-z_1$, entonces $H(t;z_1) = 0 \le (1-p)(t+z_2-100) = H(t;z_2)$. Si $100-z_1 \le t \le 100+az_1$, entonces $H(t;z_1)(1-p)(t+z_1-100) \le (1-p)(t+z_2-100) = H(t;z_2)$. Si $100+az_1 \le t \le 100+az_2$, entonces $H(t;z_1) = t-100$, $H(t;z_2) = (1-p)(t+z_2-100)$. Comparando estas expresiones, vemos que $H(t;z_1) \le H(t;z_2)$ si y sólo si

$$t - 100 \le \frac{1-p}{p} z_2$$

es decir, si y sólo si $t-100 \le az_2$, que es la condición que estamos asumiendo. Finalmente, si $t \ge 100+az_2$, entonces $H(t;z_1) = t-100 = H(t;z_2)$. Por lo tanto, para todo $t \ge 0$ se verifica que $H(t;z_1) \le t-100 = H(t;z_2)$.