EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV

19 de Enero 2015
SOLUCIONES

Apellidos: **Nombre:**

(1) **(2 puntos)**
Las funciones de utilidad de los agentes son

$$u_1(x,y) = 2\ln(x) + \ln(y), \quad u_2(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$$

y los recursos iniciales son

$$\omega^1 = (20,10), \quad \omega^2 = (10,30)$$

(a) *Calcular las asignaciones Pareto Eficientes.*
Solución: Igualando las relaciones marginales de sustitución de los agentes obtenemos que

$$\frac{2y}{x} = \frac{40-y}{30-x}$$

y resolviendo esta ecuación obtenemos que las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$y = \frac{40x}{60-x}, \quad 0 \le x \le 30$$

(b) *Calcular las funciones de demanda de los agentes.*
Solución: La función de demanda del agente 1 es la solución del siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y} & 2\log x + \log y \\ \text{s.a.} & p_1 x + p_2 y = 20p_1 + 10p_2 \end{array}$$

La condición de primer orden es

$$\frac{2y}{x} = \frac{p_1}{p_2}$$

Es decir, $p_1 x = 2p_2 y$. Sustituyendo esta expresión en la restricción presupuestaria del agente obtenemos que $3p_2 y = 20p_1 + 10p_2$. Y despejando y obtenemos que

$$y^1 = \frac{20}{3}\frac{p_1}{p_2} + \frac{10}{3}, \quad x^1 = \frac{20}{3}\frac{p_2}{p_1} + \frac{40}{3}$$

La función de demanda del agente 2 es la solución del siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y} & \log x + \log y \\ \text{s.a.} & p_1 x + p_2 y = 10p_1 + 30p_2 \end{array}$$

La condición de primer orden es

$$\frac{y}{x} = \frac{p_1}{p_2}$$

Es decir, $p_1 x = p_2 y$. Sustituyendo esta expresión en la restricción presupuestaria del agente obtenemos que $2p_1 x = 10p_1 + 30p_2$. Y despejando x obtenemos que

$$x^2 = \frac{15p_2}{p_1} + 5, \quad y^2 = \frac{5p_1}{p_2} + 15,$$

(c) *Calcular el equilibrio competitivo de la Economía.*
Solución: La condición de vaciado de mercado para el bien 1 es

$$30 = x^1 + x^2 = \frac{20}{3}\frac{p_2}{p_1} + \frac{40}{3} + \frac{15p_2}{p_1} + 5$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{7}{13}$$

Podemos elegir los precios de equilibrio $p_1 = 13$, $p_2 = 7$. Sustituyendo en las funciones de demanda de los agentes obtenemos las asignaciones de equilibrio

$$x^1 = \frac{220}{13}, \quad y^1 = \frac{110}{7}$$
$$x^2 = \frac{170}{13}, \quad y^2 = \frac{170}{7}$$

(d) *Comprobar que la asignación $x^1 = (10, 8)$, $x^2 = (20, 32)$ es Pareto Eficiente y determinar para qué redistribuciones de los recursos iniciales la asignación anterior es un equilibrio competitivo.*
Solución: En el apartado (1) hemos visto que las asignaciones (x^1, y^1) que verifican la ecuación $y^1 = \frac{40x^1}{60-x^1}$ son PE. Como la asignación $x^1 = 10$, $y^1 = 8$ verifica esta ecuación, es PE.
En un equilibrio competitivo debe verificarse que

$$\frac{p_1}{p_2} = \left.\frac{2y}{x}\right|_{x=10, y=8} = \frac{8}{5}$$

Por lo tanto, los precios de equilibrio que soportan la asignación son $p_1 = 8$, $p_2 = 5$. La asignación $x^1 = (10, 8)$, $x^2 = (20, 32)$ es un equilibrio competitivo para todas aquellas asignaciones iniciales $x^1 = (a, b)$, $x^2 = (30 - a, 40 - b)$ que verifican la ecuación siguiente,

$$8a + 5b = 8 \times 10 + 5 \times 8 = 120.$$

(e) *Encontrar unos pesos α_1, α_2 tales que la asignación $x^1 = (10, 8)$, $x^2 = (20, 32)$ del apartado anterior sea la elegida por la función de bienestar social $W\left(u^1, u^2\right) = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2$.*
Solución: Los pesos verifican que

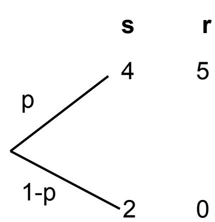
$$\alpha_i = \frac{p_l}{\frac{\partial u^i}{\partial x^i_l}}, \quad i, l = 1, 2$$

Por lo tanto

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x^2_1}}{\frac{\partial u^1}{\partial x^1_1}} = \left.\frac{x^1}{2x^2}\right|_{x^1=10, x^2=20} = \frac{1}{4}$$

Tomamos entonces $\alpha^1 = 1$, $\alpha_2 = 4$.

(2) **(1 punto)**
Supongamos un agente cuya función de utilidad sobre cantidades monetarias es $u_(x) = \sqrt{x}$. El agente se gasta toda la renta inicial w en comprar una cartera con un activo de riesgo r y otro activo seguro s. El precio de cada unidad del activo es de 1 u.m. y los pagos unitarios (en el futuro) están representados en el siguiente diagrama



Calcular las cantidades α y β (resp.) que demanda el agente de cada uno de los activos (resp.) s y r como un función de la renta y de las probabilidad p.

Solución: Como el agente compra α unidades del activo s y β unidades del activo r y el precio unitario de cada activo es 1 u.m., la restricción presupuestaria es $\alpha + \beta = w$ de donde $\beta = w - \alpha$. Por otra parte, los dividendos de la cartera serían $\alpha(4, 2) + \beta(5, 0) = (4\alpha + 5\beta, 2\alpha) = (5w - \alpha, 2\alpha)$. La utilidad esperada del agente si compra α unidades del activo s y $w - \alpha$ unidades del activo r es

$$U(\alpha) = p\sqrt{5w - \alpha} + (1 - p)\sqrt{\alpha}$$

La condición de primer orden es

$$\frac{p}{\sqrt{5w - \alpha}} = \frac{2(1 - p)}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Despejando α, obtenemos que

$$\alpha = \frac{10(1 - p)^2}{p^2 + 2(1 - p)^2} w$$

(3) **(1 punto)**
¿Cuál de las siguientes loterías elegiría un agente averso al riesgo? Razonar la respuesta.

Solución: La utilidad esperada de la lotería A es $E_A[u] = \frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(0)$. Observamos que

$$10 = \frac{2}{5} \times 20 + \frac{3}{5} \times 0 + \frac{10}{5} > \frac{2}{5} \times 20 + \frac{3}{5} \times 0.$$

Y, como el agente es averso al riesgo,

$$u(10) > u\left(\frac{2}{5} \times 20 + \frac{3}{5} \times 0\right) \geq \frac{2}{5} \times u(20) + \frac{3}{5} \times u(0)$$

Por lo tanto,

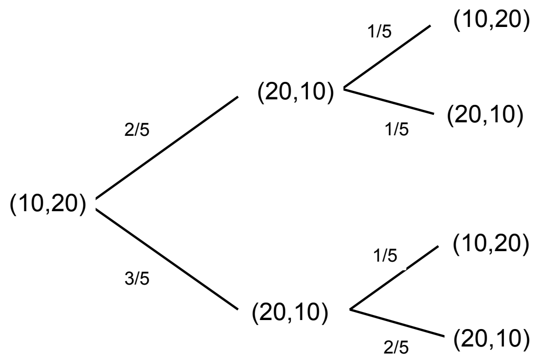
$$E_A[u] > \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \times u(20) + \frac{3}{5} \times u(0)\right) + \frac{1}{2}u(0) = \frac{1}{5}u(20) + \frac{4}{5}u(0) = E_B[u],$$

que es la utilidad esperada con la lotería B. Concluimos que un agente averso al riesgo prefiere la lotería A a la lotería B.

(4) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con dos agentes, un bien y en la que cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

$$u^i(x) = \sum_s \pi_s \ln x_s$$

Los π_s y los **recursos agregados** *de los agentes están representados en la figura siguiente ($\pi_0 = 1$),*



(a) *Determinar todas las asignaciones Pareto eficientes. Supongamos que en una determinada asignación Pareto eficiente, x_s^i, se verifica que $x_{21}^2 = 5$. Determinar el consumo x_{11}^1 en esa asignación.*

Solución: Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i\in I} \alpha^i \sum_{s\in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $I = \{1, 2\}$, $0 \le \alpha^1, \ldots, \alpha^I \le 1$ y $\sum_{i\in I} \alpha^i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i\in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i\in I} \alpha^i \sum_{s\in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s\in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i\in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha^i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i\in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i\in I} \alpha^i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i\in I} \alpha^i = \lambda_s \sum_{i\in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha^i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha^i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha^i w_s, \quad i = 1, 2 \quad \text{con} \quad 0 \le \alpha^1, \alpha^2 \le 1, \quad \alpha^1 + \alpha^2 = 1.$$

En la asignación Pareto eficiente se verifica que $x_{21}^2 = 5$, por lo que

$$\alpha^2 = \frac{x_{21}^2}{w_{21}^1 + w_{21}^2} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

de donde

$$\alpha^1 = 1 - \alpha^2 = \frac{5}{6}$$

Ahora calculamos

$$x_{11}^1 = \alpha^1 (w_{11}^1 + w_{11}^2) = 25$$

(b) *Determinar el equilibrio de Arrow–Debreu.*

Solución:
Utilizaremos que, en el apartado anterior, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma $x_s^i = \alpha^i w_s$ con $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$.
Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha^i \pi_s = \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha^i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. El equilibrio de Arrow–Debreu es

$$x_s^i = \alpha^i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$p_0 = \tfrac{1}{5}$$
$$p_{11} = \tfrac{2}{5}, \quad p_{12} = \tfrac{3}{5}$$
$$p_{21} = \tfrac{1}{5}, \quad p_{22} = \tfrac{1}{5}, \quad p_{23} = \tfrac{1}{5}, \quad p_{24} = \tfrac{2}{5}$$

Por tanto, la renta del agente 1 es

$$p \cdot w^1 = \sum_{s \in S} p_s w_s^2 = 10\frac{1}{5} + 20\frac{2}{5} + 20\frac{3}{5} + 10\frac{1}{5} + 20\frac{1}{5} + 10\frac{1}{5} + 20\frac{2}{5} = \frac{23}{15}$$

por lo que

$$\alpha^1 = \frac{23}{45}$$

y

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{22}{45}.$$

Finalmente las asignaciones de equilibrio son

$$x_s^1 = \frac{46}{3}, \quad x_s^2 = \frac{44}{3}$$

(5) **(2 puntos)**
Consideremos la economía del problema anterior de Radner con dos agentes, dos activos y un bien. Los dividendos de los activos son,

	r_1	r_2
e_{21}	1	1
e_{22}	1	0
e_{23}	1	2
e_{24}	2	1

Supongamos que los mercados son dinámicamente completos.
(a) *Determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.*

Solución: En primer lugar, vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

nodo e_0: 7
nodo e_{11}: 2
nodo e_{12}: 5

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_0\text{:} & \frac{7}{5} \\ \text{nodo } e_{11}\text{:} & 1 \\ \text{nodo } e_{12}\text{:} & \frac{5}{3} \end{array}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_0\text{:} & 5 \\ \text{nodo } e_{11}\text{:} & 1 \\ \text{nodo } e_{12}\text{:} & 4 \end{array}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_0\text{:} & 1 \\ \text{nodo } e_{11}\text{:} & \frac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{12}\text{:} & \frac{4}{3} \end{array}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_0\text{:} & \frac{16}{3} \\ \text{nodo } e_{11}\text{:} & -\frac{14}{3} \\ \text{nodo } e_{12}\text{:} & -\frac{14}{3} \\ \text{nodo } e_{21}\text{:} & \frac{16}{3} \\ \text{nodo } e_{22}\text{:} & -\frac{14}{3} \\ \text{nodo } e_{23}\text{:} & \frac{16}{3} \\ \text{nodo } e_{24}\text{:} & -\frac{14}{3} \end{array}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.
En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta_1 + \theta_2 & = & \frac{16}{3} \\ \theta_1 & = & -\frac{14}{3} \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -\frac{14}{3}$ y $\theta_2 = 10$. El precio de esta cartera es

$$-\frac{14}{3} \times 1 + 10 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es

$$-\frac{14}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{13}{3}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{array}{r} \theta_1 + 2\theta_2 = \frac{16}{3} \\ 2\theta_1 + \theta_2 = -\frac{14}{3} \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -\frac{44}{9}$ y $\theta_2 = \frac{46}{9}$. El precio de esta cartera es $-\frac{44}{9} \times \frac{5}{3} + \frac{46}{9} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$. Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es: $-\frac{4}{3} - \frac{14}{3} = -6$. Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{array}{r} \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 = -\frac{13}{3} \\ \frac{5}{3}\theta_1 + \frac{4}{3}\theta_2 = -6 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $\theta_1 = -\frac{50}{9}$, $\theta_2 = \frac{20}{9}$