EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV

31 de Enero de 2008
SOLUCIONES

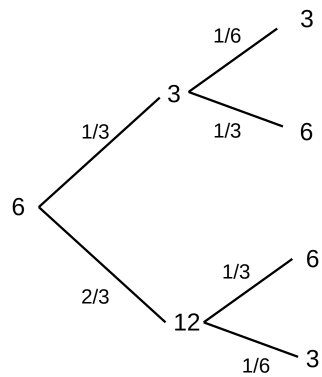
Apellidos: **Nombre:**

---

(1) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con dos agentes, un bien y en la que cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

$$u^i(x) = \sum_s \pi_s \ln x_s$$

Los π_s y los **recursos agregados** *de los agentes están representados en la figura siguiente ($\pi_0 = 1$),*



(a) *Determinar todas las asignaciones Pareto eficientes. Supongamos que en una determinada asignación Pareto eficiente, x_s^i, se verifica que $x_{24}^1 = 1$. Determinar los consumos x_{21}^2 y x_{12}^2 en esa asignación.*

Solución:
Consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $I = \{1, 2\}$, $0 \leq \alpha^1, \ldots, \alpha^I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha^i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i\in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i\in I} \alpha^i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i\in I} \alpha^i = \lambda_s \sum_{i\in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha^i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha^i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha^i w_s, \quad i = 1, 2 \quad \text{con} \quad 0 \le \alpha^1, \alpha^2 \le 1, \quad \alpha^1 + \alpha^2 = 1.$$

En la asignación Pareto eficiente se verifica que $x_{24}^1 = 1$, por lo que

$$\alpha^1 = \frac{x_{24}^1}{w_{24}^1 + w_{24}^2} = \frac{1}{3}$$

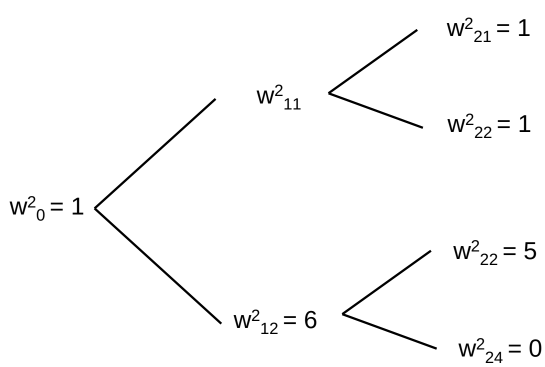
de donde

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{2}{3}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} x_{21}^2 =& \alpha^2 (w_{21}^1 + w_{21}^2) = \frac{2 \times 3}{3} = 2 \\ x_{12}^2 =& \alpha^2 (w_{12}^1 + x_{12}^2) = \frac{2 \times 12}{3} = 8 \end{aligned}$$

(b) *Sabiendo que las asignaciones iniciales del agente 2 son*



y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, el agente 1 consume $x_{22}^1 = 34/9$*, determinar los recursos iniciales* w_{11}^2 *del agente 2.*

Solución:
Utilizaremos que, en el apartado anterior, las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha^i w_s$ con $0 \le \alpha^1, \alpha^2 \le 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$.
Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w^i_s = \sum_{s \in S} p_s x^i_s = \sum_{s \in S} \alpha^i \pi_s = \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha^i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. El equilibrio de Arrow–Debreu es

$$x^i_s = \alpha^i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$p_0 = \tfrac{1}{6}$$
$$p_{11} = \tfrac{1}{9}, \quad p_{12} = \tfrac{1}{18}$$
$$p_{21} = \tfrac{1}{18}, \quad p_{22} = \tfrac{1}{18}, \quad p_{23} = \tfrac{1}{18}, \quad p_{24} = \tfrac{1}{18}$$

Por tanto, la renta del agente 2 es

$$p \cdot w^2 = \sum_{s \in S} p_s w^2_s = \frac{1}{6} + w^2_{11} \times \frac{1}{9} + \times \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + 5 \times \frac{1}{18} + 0 \times \frac{1}{18} = \frac{w^2_{11} + 8}{9}$$

Por otra parte, en la asignación de equilibrio,

$$x^1_{22} = \frac{34}{9} = \alpha^1 w_{22} = 6\alpha^1$$

por lo que

$$\alpha^1 = \frac{34}{54} = \frac{17}{27}$$

y

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{10}{27}$$

y obtenemos que

$$p \cdot w^2 = 3\alpha^2 = \frac{10}{9}$$

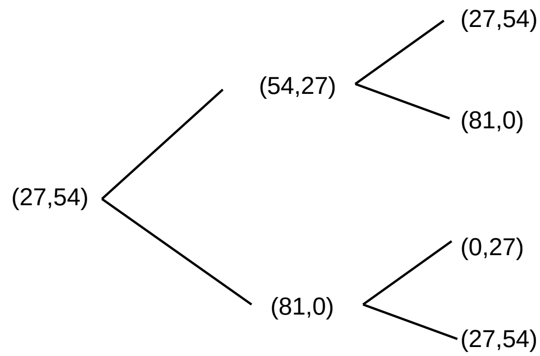
Igualando las dos expresiones para la renta del agente 2, obtenemos que

$$\frac{w^2_{11} + 8}{9} = \frac{10}{9}$$

y despejando obtenemos que

$$w^2_{11} = 2$$

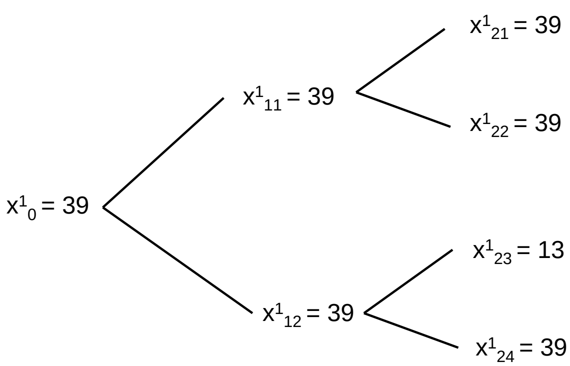
(2) **(2 puntos)**
Consideremos una economía de Radner con dos agentes, dos activos y un bien, en la que los recursos iniciales de los agentes son

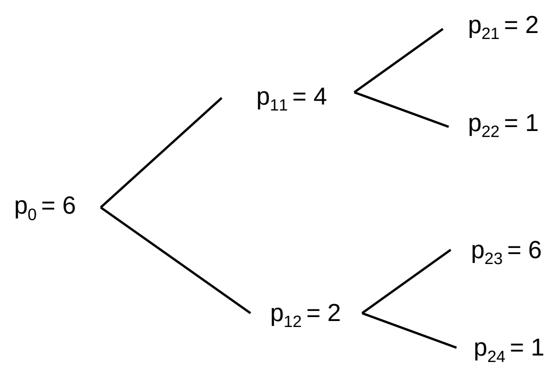


Los dividendos de los activos son,

	r_1	r_2
e_{21}	1	2
e_{22}	1	1
e_{23}	1	2
e_{24}	1	1

Supongamos que los mercados son dinámicamente completos y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, las asignaciones de equilibrio del **agente 1** *y los precios de equilibrio son*





Determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.

Solución: En primer lugar, vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_0: &\quad 10 \\ \text{nodo } e_{11}: &\quad 3 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 7 \end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_0: &\quad 5/3 \\ \text{nodo } e_{11}: &\quad 3/4 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 7/2 \end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{array}{rc} \text{nodo } e_0: & 18 \\ \text{nodo } e_{11}: & 5 \\ \text{nodo } e_{12}: & 13 \end{array}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{array}{rc} \text{nodo } e_0: & 3 \\ \text{nodo } e_{11}: & 5/4 \\ \text{nodo } e_{12}: & 13/2 \end{array}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{array}{rc} \text{nodo } e_0: & 12 \\ \text{nodo } e_{11}: & -15 \\ \text{nodo } e_{12}: & -42 \\ \text{nodo } e_{21}: & 12 \\ \text{nodo } e_{22}: & -42 \\ \text{nodo } e_{23}: & 13 \\ \text{nodo } e_{24}: & 12 \end{array}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{array}{rl} \theta_1 + 2\theta_2 & = 12 \\ \theta_1 + \theta_2 & = -42 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -96$ y $\theta_2 = 54$. El precio de esta cartera es

$$-96 \times \frac{3}{4} + 54 \times \frac{3}{4} = -\frac{9}{2}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es

$$-15 - \frac{9}{2} = -\frac{39}{2}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{array}{r} \theta_1 + 2\theta_2 = 13 \\ \theta_1 + \theta_2 = 12 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = 11$ y $\theta_2 = 1$. El precio de esta cartera es

$$11 \times \frac{7}{2} + \frac{13}{2} = 45$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$-42 + 45 = 3$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{array}{r}\frac{3}{4}\theta_1 + \frac{5}{4}\theta_2 = -\frac{39}{2} \\ \frac{7}{2}\theta_1 + \frac{13}{2}\theta_2 = 3\end{array}\right\}$$

cuya solución es

$$\theta_1 = 261, \qquad \theta_2 = 141$$

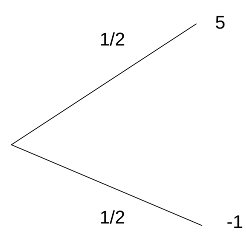
Resumiendo, la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	-261	141
e_{11}	-96	54
e_{12}	11	1

(3) **(2 puntos)**
Supongamos dos agentes A y B cuyas funciones de utilidad sobre cantidades monetarias son las siguientes

$$u_A(x) = \ln x \qquad u_B(x) = \sqrt{x}$$

Ambos tienen la misma renta inicial m y consideran la posibilidad de comprar un activo de riesgo cuyos pagos unitarios en el futuro están representados en el siguiente diagrama



El precio de cada unidad del activo es de 1 u.m.

(a) *Calcula las cantidades x_A y x_B del activo que demanda cada agente.*

Solución: Para el agente A la utilidad esperada es

$$\frac{1}{2}\ln(m + 4x) + \frac{1}{2}\ln(m - 2x)$$

y la condición de primer orden es

$$\frac{4}{m + 4x} = \frac{2}{m - 2x}$$

cuya solución es

$$x_A^* = \frac{m}{8}$$

Para el agente B la utilidad esperada es

$$\frac{1}{2}\sqrt{m + 4x} + \frac{1}{2}\sqrt{m - 2x}$$

y la condición de primer orden es

$$\frac{4}{2\sqrt{m + 4x}} = \frac{2}{2\sqrt{m - 2x}}$$

cuya solución es

$$x_B^* = \frac{m}{4}$$

Vemos que el agente B compra una cantidad mayor del activo.

(b) *Calcula los coeficientes de aversión absoluta al riesgo de cada uno de los agentes. Utilizando los coeficientes de aversión absoluta al riesgo calculados en el apartado anterior, ¿es posible explicar las diferencias en las demandas de los dos agentes calculadas en el primer apartado?*

Solución: Como

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$$

el coeficiente de aversión al riesgo del agente A es

$$R_A = \frac{1}{x}$$

Y como

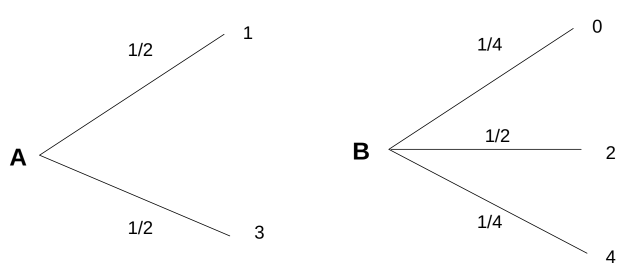
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4x^{3/2}}$$

el coeficiente de aversión al riesgo del agente B es

$$R_B = \frac{1}{2x}$$

Como $R_B < R_A$ para todas las rentas x, el agente A es más averso al riesgo y compra una cantidad menor del activo.

(4) **(1 punto)**
¿Cuál de las dos loterías siguientes elegiría un agente averso al riesgo? Razonar la respuesta.



Solución: Llamemos $v(x)$ a la función de utilidad sobre cantidades monetarias del agente. La utilidad de la lotería A es

$$U(A) = \frac{1}{2}v(1) + \frac{1}{2}v(3)$$

mientras que la utilidad de la lotería B es

$$\begin{aligned} U(B) &= \frac{1}{4}v(0) + \frac{1}{2}v(2) + \frac{1}{4}v(4) \\ &= \frac{1}{4}\left(v(0) + v(2)\right) + \frac{1}{4}\left(v(2) + v(4)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v(0) + \frac{1}{2}v(2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v(2) + \frac{1}{2}v(4)\right) \end{aligned}$$

Como el agente es averso al riesgo, tenemos que

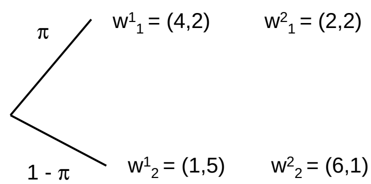
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}v(0)+\frac{1}{2}v(2) &\leq v\left(\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 2\right)=v(1)\\
\frac{1}{2}v(2)+\frac{1}{2}v(4) &\leq v\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 4\right)=v(3)
\end{aligned}$$

por lo que

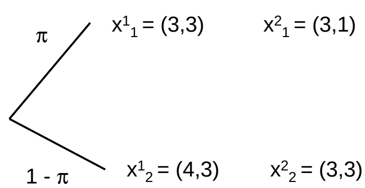
$$U(B)\leq \frac{1}{2}v(1)+\frac{1}{2}v(3)=u(A)$$

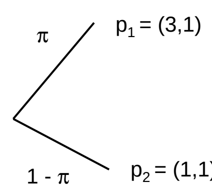
El agente prefiere la lotería A.

(5) **(1 punto)**
Consideremos una economía secuencial con dos agentes, dos bienes, dos periodos y dos estados en el segundo periodo. Los recursos iniciales de los agentes son



Supongamos que los mercados son completos y que en el equilibrio de Radner los consumos de los agentes y los precios del equilibrio de Radner son,





Encontrar los precios del equilibrio de Arrow-Debreu. (Es imprescindible razonar la respuesta).

Solución: Los precios en el equilibrio Arrow-Debreu son de la forma

$$\bar{p}_1=\mu_1(3,1)\qquad \bar{p}_2=\mu_2(1,1)$$

con $\mu_1,\mu_2>0$. Además debe verificarse la restricción presupuestaria

$$\bar{p}_1\cdot\left(w_1^1-x_1^1\right)+\bar{p}_2\cdot\left(w_2^1-x_2^1\right)=0$$

es decir

$$\mu_1(3,1)\cdot((4,2)-(3,3))+\mu_2(1,1)\cdot((1,5)-(4,3))=0$$

es decir

$$\mu_1(3,1)\cdot(1,-1)+\mu_2(1,1)\cdot(-3,2)=0$$

de donde obtenemos

$$2\mu_1=\mu_2$$

es decir, los precios en el equilibrio Arrow-Debreu son

$$\bar{p}_1=\mu_1(3,1)\qquad \bar{p}_2=2\mu_1(1,1)$$

Tomando, por ejemplo, $\mu_1 = 1$ unos precios de equilibrio son

$$\bar{p}_1 = (3, 1) \qquad \bar{p}_2 = (2, 2)$$

(6) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con un bien, dos periodos y cuatro estados posibles en el segundo periodo. Supongamos que hay cuatro activos $r_1 = (0, 1, 1, 1)$, $r_2 = (2, 0, 2, 0)$, $r_3 = (2, 0, 0, 2)$ y $r_4 = (0, 2, 0, 4)$, cuyos precios son, respectivamente, $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, $q_4 = 2$.

(a) *Calcular unas probabilidades de riesgo neutro. Determinar si hay arbitraje en la economía. ¿Son completos los mercados?*

Solución: Estudiamos el sistema

$$\begin{aligned} Q_2 + Q_3 + Q_4 &= 1 \\ 2Q_1 + 2Q_3 &= 1 \\ 2Q_1 + 2Q_4 &= 1 \\ 2Q_2 + 4Q_4 &= 2 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta sistema son de la forma,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} - Q_4 \\ Q_2 &= 1 - 2Q_4 \\ Q_3 &= Q_4 \end{aligned}$$

Para que todas las Q_s sean positivas, debe verificarse que

$$0 < Q_4 < \frac{1}{2}$$

Cualquiera de estos valores de Q_4 proporciona una solución con todas las Q_s positivas. Por tanto, no hay arbitraje. Como la solución no es única, los mercados no son completos.

(b) *Determinar el conjunto de activos cuyo precio está determinado de forma única por los precios $q_1, \ldots, q_4$ de los activos $r_1, \ldots, r_4$ y la condición de no arbitraje en la economía. Encontrar una ecuación que caracterice ese conjunto.*

Solución: Utilizando las Q_s calculadas en el apartado anterior, el precio que el activo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sería

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 + Q_4 x_4 \\ &= \frac{x_1}{2} - Q_4 x_1 + 2x_2 Q_4 x_3 + Q_4 x_4 \\ &= \frac{x_1}{2} + 2x_2 + (x_3 + x_4 - x_1 - 2x_2) Q_4 \end{aligned}$$

Y para que no dependa de Q_4 debe verificarse que

$$x_3 + x_4 - x_1 - 2x_2 = 0$$

(c) *Se introduce un nuevo activo $r_5 = (2,4,8,2)$. ¿Qué valoraciones de este activo son compatibles con la no existencia de arbitraje en la economía?*

Solución: El activo $r_5 = (2,4,8,2)$ verifica la ecuación $x_3 + x_4 - x_1 - 2x_2 = 0$ por lo que, para que no haya arbitraje su precio debería ser

$$\varphi(r_5) = \frac{x_1}{2} + 2x_2 = 5$$

(d) *Razonar que si el precio del activo $r_5 = (2,4,8,2)$ es $q_5 = 3$ hay arbitraje en la Economía. Encontrar una estrategia de arbitraje.*

Solución: Si el precio del activo $r_5 = (2,4,8,2)$ es $q_5 = 3$, entonces, según el apartado anterior, debería haber arbitraje.
Como el precio $q_5 = 3$ es menor que el encontrado en el apartado anterior, la estrategia de arbitraje debería comprar r_5 y vender algún otro activo al corto. Elegimos la cartera $z_1 = -2$, $z_2 = -1$, $z_3 = z_4 = 0$ y $z_5 = 1$. Su precio (en $t = 0$) es

$$q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 = 0$$

mientras que los dividendos son

$$z_1 r_1 + z_2 r_2 + z_5 r_5 = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

por lo que esta cartera realiza el arbitraje.