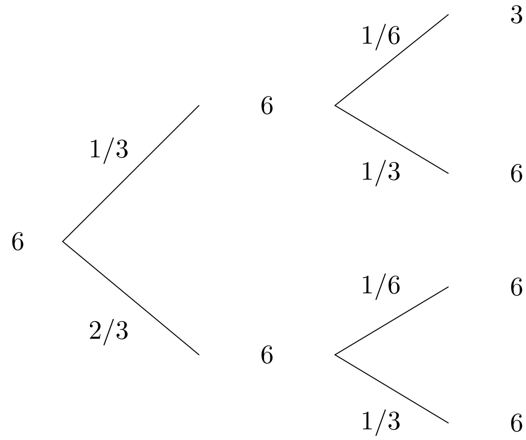
EXAMEN DE MICROECONOMÍA IV
27 DE ENERO 2007
Soluciones

(1) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con dos agentes, un bien y en la que cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

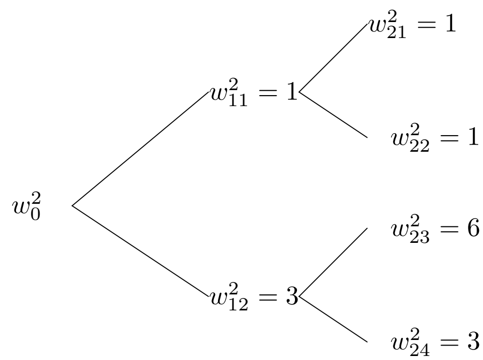
$$u^i(x) = \sum_s \pi_s \ln x_s$$

Los π_s y los **recursos agregados** de los agentes están representados en la figura siguiente,



(a) Determinar todas las asignaciones Pareto eficientes. Supongamos que en una determinada asignación Pareto eficiente, x^i_s, se verifica que $x^1_0 = 2$. Determinar los consumos x^2_{21} y x^2_{12} en esa asignación.

(b) Determinar los precios de equilibrio. Sabiendo que las asignaciones iniciales del agente 2 son



y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, el agente 1 consume $x^1_{12} = 3$, determinar los recursos iniciales w^2_0 del agente 2.

Solución:

(a) Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x^i_s$$

con $I = \{1, 2\}$, $0 \leq \alpha^1, \ldots, \alpha^I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x^i_s = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x^i_s + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x^i_s \right)$$

$$\lambda_s = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha^i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i\in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i\in I} \alpha^i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i\in I} \alpha^i = \lambda_s \sum_{i\in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

es decir,

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha^i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha^i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha^i w_s, \quad i = 1, 2 \quad \text{con} \quad 0 \le \alpha^1, \alpha^2 \le 1, \quad \alpha^1 + \alpha^2 = 1.$$

En la asignación Pareto eficiente se verifica que $x_0^1 = 2$, por lo que

$$\alpha^1 = \frac{x_0^1}{w_0^1 + w_0^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

de donde

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{2}{3}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} x_{21}^2 =& \alpha^2 (w_{21}^1 + w_{21}^2) = \frac{6}{3} = 2 \\ x_{12}^2 =& \alpha^2 (w_{12}^1 + x_{12}^2) = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

(b) Utilizaremos que, en el apartado a), las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha^i w_s$ con $0 \le \alpha^1, \alpha^2 \le 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$.
Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \le \alpha^1, \alpha^2 \le 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s\in S} p_s w_s^i = \sum_{s\in S} p_s x_s^i = \sum_{s\in S} \alpha^i \pi_s = \alpha^i \sum_{s\in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha^i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s\in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s\in S} \pi_s = 3$. El equilibrio de Arrow–Debreu es

$$x_s^i = \alpha^i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$\begin{gathered} p_0 = \tfrac{1}{6} \\ p_{11} = \tfrac{1}{18}, \quad p_{12} = \tfrac{1}{9} \\ p_{21} = \tfrac{1}{18}, \quad p_{22} = \tfrac{1}{18}, \quad p_{23} = \tfrac{1}{36}, \quad p_{24} = \tfrac{1}{18} \end{gathered}$$

Por tanto, la renta del agente 2 es

$$p \cdot w^2 = \sum_{s\in S} p_s w_s^2 = w_0^2 \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + 3\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + 6\frac{1}{36} + 3\frac{1}{18} = \frac{w_0^2 + 5}{6}$$

Por otra parte, en la asignación de equilibrio,

$$x_{12}^1 = 3 = \alpha^1 w_{12} = 6\alpha^1$$

$$\alpha^1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

y

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{1}{2}$$

y obtenemos que

$$p \cdot w^2 = 3\alpha^2 = \frac{3}{2}$$

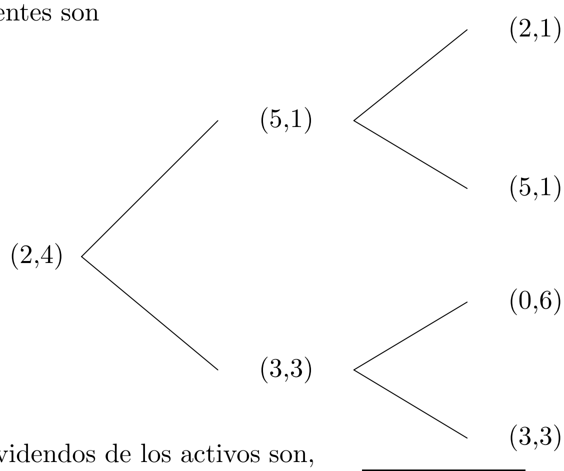
Igualando las dos expresiones para la renta del agente 2, obtenemos que

$$\frac{w_0^2 + 5}{6} = \frac{3}{2}$$

y despejando obtenemos que

$$w_0^2 = 4$$

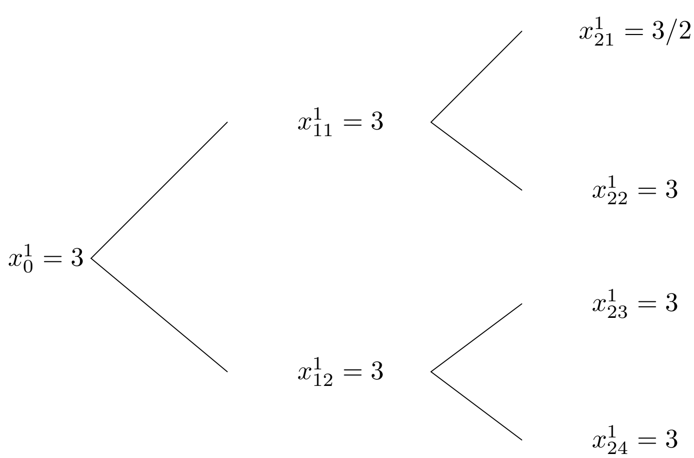
(2) **(2 puntos)**
Consideremos una economía de Radner con dos agentes, dos activos y un bien, en la que los recursos iniciales de los agentes son



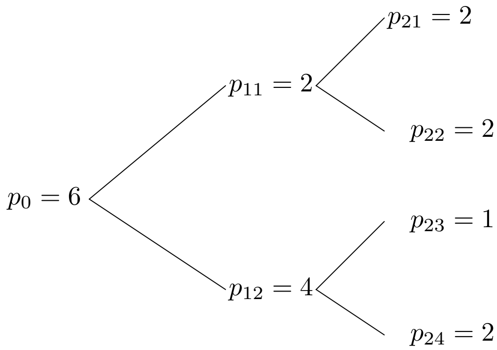
Los dividendos de los activos son,

	r_1	r_2
e_{21}	1	2
e_{22}	2	1
e_{23}	1	0
e_{24}	0	1

Supongamos que los mercados son dinámicamente completos y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, las asignaciones de equilibrio del **agente 1** son



y los precios de equilibrio son



Determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.

Solución: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 6 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 1 \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad 7 \end{aligned}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 3 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 1/4 \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad 7/6 \end{aligned}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 6 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 2 \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad 8 \end{aligned}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{11}: &\quad 3 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad \tfrac{1}{2} \\ \text{nodo } e_{0}: &\quad \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{aligned} \text{nodo } e_{0}: &\quad 1 \\ \text{nodo } e_{11}: &\quad -2 \\ \text{nodo } e_{12}: &\quad 0 \\ \text{nodo } e_{21}: &\quad -1/2 \\ \text{nodo } e_{22}: &\quad -2 \\ \text{nodo } e_{23}: &\quad 3 \\ \text{nodo } e_{24}: &\quad 0 \end{aligned}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 + 2\theta_2 &= -1/2 \\ 2\theta_1 + \theta_2 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -7/6$ y $\theta_2 = 1/3$. El precio de esta cartera es

$$-3 \cdot \frac{7}{6} + 3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2}-2=-\frac{9}{2}$$

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{array}{r}\theta_1=3\\ \theta_2=0\end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1=3$ y $\theta_2=0$. El precio de esta cartera es

$$3\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$0+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Finalmente, la cartera en el nodo e_0 se escoge de forma que

$$\left.\begin{array}{r}3\theta_1+3\theta_2=-\frac{9}{2}\\ \frac{1}{4}\theta_1+\frac{1}{2}\theta_2=\frac{3}{4}\end{array}\right\}$$

cuya solución es

$$\theta_1=-6,\qquad \theta_2=\frac{9}{2}$$

Resumiendo, la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	-6	9/2
e_{11}	-7/6	1/3
e_{12}	3	0

(3) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con un bien, dos periodos y tres estados posibles en el segundo periodo. Supongamos que hay cuatro activos $r_1=(1,1,1)$, $r_2=(3,0,3)$, $r_3=(4,1,4)$ y $r_4=(1,4,1)$, cuyos precios son $q_1=q_2=1$, $q_3=2$, $q_4=3$.

(a) Calcular todas las probabilidades de riesgo neutro. Determinar si hay arbitraje en la economía. ¿Son completos los mercados?

(b) Determinar el conjunto de activos cuyo precio está determinado de forma única por los precios $q_1,\dots,q_4$ de los activos $r_1,\dots,r_4$ y la condición de no arbitraje en la economía. Encontrar una ecuación que caracterice ese conjunto.

(c) Se introduce un nuevo activo $r_5=(1,4,2)$. ¿Qué valoraciones de este activo son compatibles con la no existencia de arbitraje en la economía?

(d) Razonar que si el precio del activo $r_5=(1,4,2)$ es $q_5=3$ hay arbitraje en la Economía. Encontrar una estrategia de arbitraje.

Solución:

(a) Estudiamos el sistema

$$\begin{aligned}Q_1+Q_2+Q_3&=1\\ 3Q_1+3Q_3&=1\\ 4Q_1+Q_2+4Q_3&=2\\ Q_1+4Q_2+Q_3+Q_4&=3\end{aligned}$$

Las soluciones positivas del sistema son de la forma

$$\begin{aligned}Q_1&=\frac{1}{3}-Q_3\\ Q_2&=\frac{2}{3}\\ 0<Q_3&<\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(b) El precio que el activo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tendría utilizando las Q_s calculadas en el apartado anterior sería

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{x_1}{3} - x_1 Q_3 + \frac{2x_2}{3} + Q_3 x_3 \\ &= \frac{x_1}{3} + \frac{2x_2}{3} + (x_3 - x_1) Q_3\end{aligned}$$

Y para que no dependa de Q_3 debe verificarse que

$$x_3 - x_1 = 0$$

(c) El activo $r_5 = (1, 4, 2)$ no verifica la ecuación $x_3 - x_1 = 0$. Para que no haya arbitraje su precio debería ser

$$\varphi(r_5) = \frac{1}{3} - Q_3 + \frac{8}{3} + 2Q_3 = 3 + Q_3$$

Como $0 < Q_3 < 1/3$, las valoraciones de r_5 que son compatibles con la no existencia de arbitraje son

$$3 < \varphi(r_5) < 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

(d) Si el precio del activo $r_5 = (1, 4, 2)$ es $q_5 = 3$, entonces, según el apartado anterior, debería haber arbitraje. Por otra parte, vemos

$$r_5 > 4r_1 - r_2$$

elegimos la cartera $z_1 = -4$, $z_2 = 1$, $z_5 = 1$ obtenemos que su precio (en $t = 0$) es

$$q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 = 0$$

mientras que los dividendos son

$$z_1 r_1 + z_2 r_2 + z_5 r_5 = -4 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} > 0$$

por lo que esta cartera realiza el arbitraje.

(4) **(2 puntos)**
Consideremos un agente **averso al riesgo** con la función de utilidad $v(x)$ sobre cantidades monetarias y preferencias

$$U(F) = \int v(z)\, dF(z)$$

sobre loterías.

Supongamos que en el futuro hay dos estados posibles que ocurren con probabilidades π y $1 - \pi$ y que el agente puede elegir entre dos activos, $r_1 = (1, 1)$ y $r_2 = (0, 3)$ cuyos precios son, respectivamente $q_1 = 1$ y $q_2 = 1$. (Por ejemplo, el activo r_2 paga 0 unidades monetarias si (con probabilidad π) ocurre el estado 1 y paga 3 unidades monetarias si (con probabilidad $1 - \pi$) ocurre el estado 2. La riqueza inicial del agente es w. Llamamos α a la cantidad de unidades del activo r_2 que compraría el agente.

(a) Determinar para qué valores de π el agente elige $\alpha = 0$ ó $\alpha = w$.

(b) Suponiendo que la función de utilidad del agente es

$$v(x) = \sqrt{x}$$

calcular la cantidad, α, de unidades del activo r_2 que compraría el agente. ¿Cómo cambia α al variar la renta inicial w del agente? ¿Cómo cambia α/w al variar la renta inicial w del agente? Calcular los coeficientes de aversión absoluta y de aversión relativa al riesgo del agente. Explicar los resultados obtenidos utilizando estos coeficientes.

(a) Si el agente compra α unidades del activo r_2, entonces su utilidad es

$$U(\alpha) = \pi v(w - \alpha) + (1 - \pi) v(w + 2\alpha)$$

La derivada es

$$U'(\alpha) = -\pi v'(w - \alpha) + 2(1 - \pi) v'(w + 2\alpha)$$

Para que $\alpha = 0$ sea un óptimo debe verificarse que $U'(0) \leq 0$. Esto ocurre si y sólo si

$$-\pi v'(w) + 2(1 - \pi) v'(w) = v'(w)(2 - 3\pi) \leq 0$$

$$\pi \geq \frac{2}{3}$$

Para que $\alpha = w$ sea un óptimo debe verificarse que $U'(w) \geq 0$. Esto ocurre si y sólo si

$$-\pi v'(0) + 2(1-\pi)v'(3w) \geq 0$$

es decir, si y sólo si

$$\pi \leq \frac{2v'(3w)}{v'(0) + 2v'(3w)}$$

(b) Aplicando la condición de primer orden $U'(\alpha) = 0$ a la función de utilidad

$$v(x) = \sqrt{x}$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{\pi}{\sqrt{w-\alpha}} = \frac{2(1-\pi)}{\sqrt{w+2\alpha}}$$

es decir

$$\frac{\pi^2}{w-\alpha} = \frac{4(1-\pi)^2}{w+2\alpha}$$

Despejamos α y obtenemos

$$\alpha(w) = \frac{3\pi^2 - 8\pi + 4}{2\pi^2 + 4(1-\pi)^2} w = \frac{3\pi^2 - 8\pi + 4}{6\pi^2 - 8\pi + 4} w$$

El denominador es positivo para todos los valores de π. Las raíces del numerador son

$$\pi = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{2}{3}, 2$$

por tanto el signo del numerador es

$$3\pi^2 - 8\pi + 4 \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si } 0 \leq \pi \leq 2/3, \\ \leq 0 & \text{si } 2/3 \leq \pi \leq 1. \end{cases}$$

Recordando el apartado anterior, vemos que,

$$\alpha(w) = \begin{cases} \frac{3\pi^2-8\pi+4}{6\pi^2-8\pi+4} w & \text{si } 0 \leq \pi \leq 2/3, \\ 0 & \text{si } 2/3 \leq \pi \leq 1. \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\alpha(w) \text{es creciente en } w$$

$$\alpha(w)/w \text{es constante en } w$$

Los coeficientes de aversión absoluta y relativa al riesgo son

$$R_a(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{1}{2x}$$

$$R_r(x) = -x\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{1}{2}$$

Como el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es decreciente, la cantidad que el agente invierte en el activo de riesgo es creciente con la renta. Y como el coeficiente de aversión relativa al riesgo es constante, la fracción de la renta que el agente invierte en el activo de riesgo es constante.

(5) **(1 punto)**
Consideremos una economía con 2 periodos, 2 agentes, 1 bien y 2 estados en el segundo periodo, $t = 1$. La función de utilidad de los agentes es

$$u_i(x_1^i, x_2^i) = \pi^i u(x_1^i) + (1-\pi^i)u(x_2^i) \quad i = 1, 2$$

con

$$1 > \pi^1 > \frac{1}{2} > \pi^2 > 0$$

No hay incertidumbre agregada y los agentes son aversos al riesgo. Probar que en un equilibrio de Arrow-Debreu se verifica que

$$x_1^1 > x_2^1, \quad x_1^2 < x_2^2$$

Los óptimos de Pareto verifican la ecuación

$$\frac{\pi^1 u_1'(x_1^1)}{(1-\pi^1)u_1'(x_2^1)} = \frac{\pi^2 u_2'(x_1^2)}{(1-\pi^2)u_2'(x_2^2)}$$

Sea w los recursos agregados de los agentes en cualquiera de los dos estados (no depende del estado, ya que no hay incertidumbre agregada). Como $\pi^1 > \pi^2 > 0$ y por tanto,

$$\frac{1}{1-\pi^1} > \frac{1}{1-\pi^2}$$

tenemos que

$$\frac{\pi^1}{1-\pi^1} > \frac{\pi^2}{1-\pi^2}$$

por lo que debe verificarse que

$$\frac{u_1'(x_1^1)}{u_1'(x_2^1)} < \frac{u_2'(x_1^2)}{u_2'(x_2^2)}$$

Supongamos que $x_1^1 \leq x_2^1$. Entonces, $w - x_1^1 \geq w - x_2^1$, por lo que

$$u'(x_1^1) \leq u'(x_2^1)$$
$$u'(w - x_1^1) \leq u'(w - x_2^1)$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{u_1'(x_1^1)}{u_1'(x_2^1)} \geq \frac{u_2'(x_1^2)}{u_2'(x_2^2)}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe verificarse que $x_1^1 > x_2^1$ y, por tanto, $x_1^2 = w - x_1^1 < w - x_2^1 = x_2^2$.

(6) **(1 punto)**

Supongamos que G es una lotería compuesta, en la que primero jugamos la lotería F y después otra lotería H con valor esperado

$$\int z \, dH(z) = 0$$

Probar que F domina a G estocásticamente de segundo orden.

Sea v un agente averso al riesgo (o sea, v es cóncava). Entonces

$$\begin{aligned}\varphi(G) &= \int v(x)\, dG(x) = \int (\int v(x+z)\, dH(z))\, dF(x) \leq \text{ (porque } v \text{ es cóncava)} \\ &\leq \int v(\int (x+z)\, dH(z))\, dF(x) = \int v(x) dF(x) = \varphi(F)\end{aligned}$$

es decir, todo agente averso al riesgo prefiere F a G.

Por tanto, F domina a G estocásticamente de segundo orden.