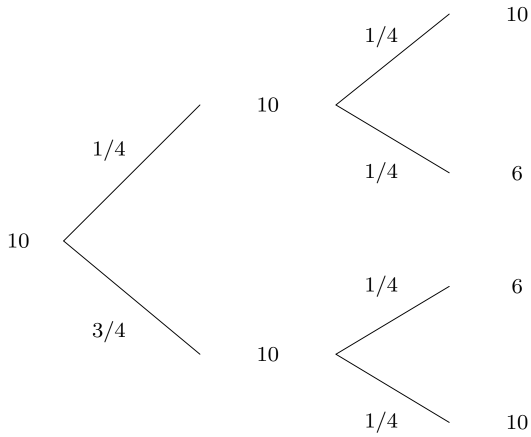
Soluciones

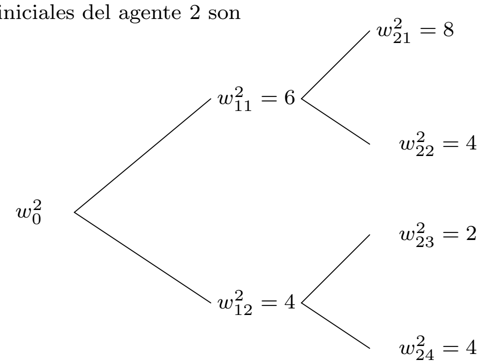
(1) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con dos agentes, un bien y en la que cada agente $i = 1, 2$ tiene la función de utilidad

$$u^i(x) = \sum_s \pi_s \ln x_s$$

Los π_s y los **recursos agregados** de los agentes están representados en la figura siguiente,



(a) Determinar todas las asignaciones Pareto eficientes. Supongamos que en una determinada asignación Pareto eficiente, x_s^i, se verifica que $x_0^1 = 6$. Determinar los consumos x_{21}^2 y x_{12}^2 en esa asignación.
(b) Sabiendo que las asignaciones iniciales del agente 2 son



y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, el agente 1 consume $x_{12}^1 = 6$, determinar los recursos iniciales w_0^2 del agente 2.

Solución:
(a) Para las asignaciones Pareto eficientes, consideramos la función de bienestar social

$$W = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i$$

con $I = \{1, 2\}$, $0 \leq \alpha^1, \ldots, \alpha^I \leq 1$ y $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$. Y resolvemos el problema de maximización siguiente,

$$\begin{array}{ll} \max & W \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in I} x_s^i = w_s \quad s \in S \end{array}$$

El lagrangiano asociado es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s \ln x_s^i + \sum_{s \in S} \lambda_s \left(w_s - \sum_{i \in I} x_s^i \right)$$

Obtenemos las ecuaciones de primer orden

$$\lambda_s = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} \qquad i \in I, s \in S$$

de aquí obtenemos que $\alpha^i \pi_s = \lambda_s x_s^i$ con lo que, sumando para $i \in I$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i \in I} x_s^i = w_s$ y que $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$, obtenemos que

$$\pi_s = \pi_s \sum_{i \in I} \alpha^i = \lambda_s \sum_{i \in I} x_s^i = \lambda_s w_s,$$

$$\lambda_s = \frac{\pi_s}{w_s}$$

y

$$x_s^i = \alpha^i \frac{\pi_s}{\lambda_s} = \alpha^i w_s.$$

Por tanto, las asignaciones Pareto eficientes son de la forma

$$x_s^i = \alpha^i w_s, \quad i = 1,2 \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1, \quad \alpha^1 + \alpha^2 = 1.$$

En la asignación Pareto eficiente se verifica que $x_0^1 = 6$, por lo que

$$\alpha^1 = \frac{x_0^1}{w_0^1 + w_0^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

de donde

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{2}{5}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} x_{21}^2 &= \alpha^2 (w_{21}^1 + w_{21}^2) = \frac{20}{5} = 4 \\ x_{12}^2 &= \alpha^2 (w_{12}^1 + x_{12}^2) = \frac{20}{5} = 4 \end{aligned}$$

(b) Utilizaremos que, en el apartado a), las asignaciones eficientes de Pareto son de la forma $x_s^i = \alpha^i w_s$ con $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$.

Los precios de equilibrio son

$$p_s = \frac{\partial W}{\partial x_s^i} = \frac{\alpha^i \pi_s}{x_s^i} = \frac{\pi_s}{w_s}$$

para algunos pesos $0 \leq \alpha^1, \alpha^2 \leq 1$ y $\alpha^1 + \alpha^2 = 1$. Por otra parte, la restricción presupuestaria es

$$p \cdot w^i = \sum_{s \in S} p_s w_s^i = \sum_{s \in S} p_s x_s^i = \sum_{s \in S} \alpha^i \pi_s = \alpha^i \sum_{s \in S} \pi_s$$

es decir,

$$\alpha^i = \frac{p \cdot w^i}{\sum_{s \in S} \pi_s} = \frac{p \cdot w^i}{3}$$

ya que $\sum_{s \in S} \pi_s = 3$. El equilibrio de Arrow–Debreu es

$$x_s^i = \alpha^i w_s = \frac{p \cdot w^i}{3} w_s, \qquad p_s = \frac{\pi_s}{w_s}, \qquad s \in S, i \in I.$$

Ahora sustituimos los datos del problema. Los precios de equilibrio son

$$p_0 = \tfrac{1}{10}$$
$$p_{11} = \tfrac{1}{40}, \quad p_{12} = \tfrac{3}{40}$$
$$p_{21} = \tfrac{1}{40}, \quad p_{22} = \tfrac{1}{24}, \quad p_{23} = \tfrac{1}{24}, \quad p_{24} = \tfrac{1}{40}$$

Por tanto, la renta del agente 2 es

$$p \cdot w^2 = \sum_{s \in S} p_s w_s^2 = w_0^2 \frac{1}{10} + 6\frac{1}{40} + 4\frac{3}{40} + 8\frac{1}{40} + 4\frac{1}{24} + 2\frac{1}{24} + 4\frac{1}{40} = \frac{w_0^2}{10} + 1$$

Por otra parte, en la asignación de equilibrio,

$$x_{12}^1 = 6 = \alpha^1 w_{12} = 10\alpha^1$$

por lo que

$$\alpha^1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

y

$$\alpha^2 = 1 - \alpha^1 = \frac{2}{5}$$

y obtenemos que

$$p \cdot w^2 = 3\alpha^2 = \frac{6}{5}$$

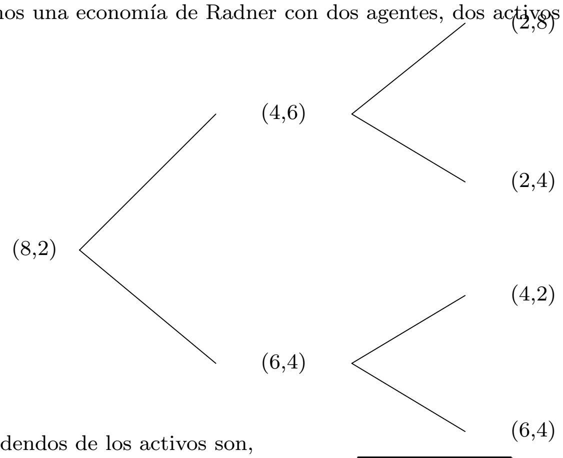
Igualando las dos expresiones para la renta del agente 2, obtenemos que

$$\frac{w_0^2}{10} + 1 = \frac{6}{5}$$

y despejando obtenemos que

$$w_0^2 = 2$$

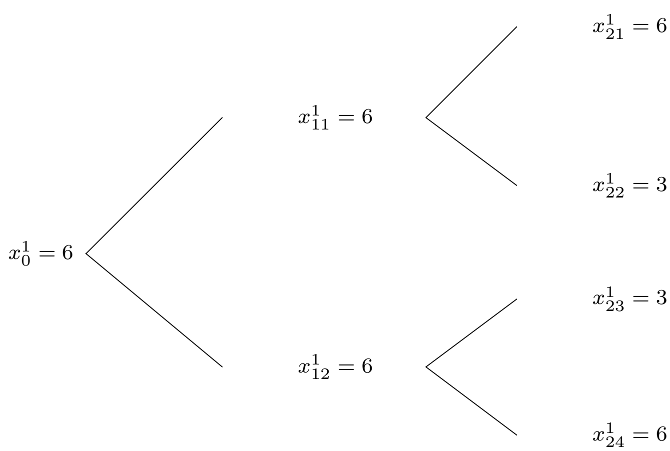
Consideremos una economía de Radner con dos agentes, dos activos y un bien, en la que los recursos iniciales de los agentes son



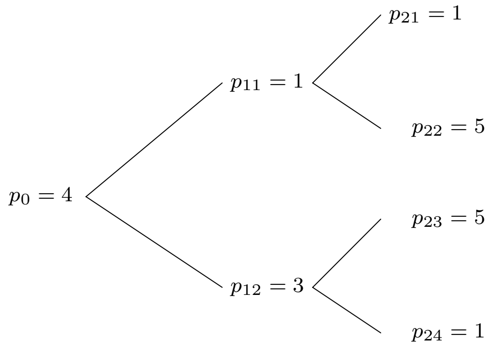
Los dividendos de los activos son,

	r_1	r_2
e_{21}	1	2
e_{22}	1	1
e_{23}	1	0
e_{24}	1	2

Supongamos que los mercados son dinámicamente completos y que, en el equilibrio de Arrow–Debreu, las asignaciones de equilibrio del **agente 1** son



y los precios de equilibrio son



Determinar los precios de los activos y las carteras de los agentes en el equilibrio de Radner de la economía.

Solución: En primer lugar vamos a calcular los precios de los activos. Los precios del activo 1 son:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_{11}: & 6 \\ \text{nodo } e_{12}: & 6 \\ \text{nodo } e_0: & 12 \end{array}$$

Ahora normalizamos estos precios, utilizando como numerario el bien de la economía:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_{11}: & 6 \\ \text{nodo } e_{12}: & 2 \\ \text{nodo } e_0: & 3 \end{array}$$

Mientras que los precios del activo 2 son:

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_{11}: & 7 \\ \text{nodo } e_{12}: & 2 \\ \text{nodo } e_0: & 9 \end{array}$$

que, normalizando en términos del numerario queda

$$\begin{array}{rl} \text{nodo } e_{11}: & 7 \\ \text{nodo } e_{12}: & \frac{2}{3} \\ \text{nodo } e_0: & \frac{9}{4} \end{array}$$

Los excesos de consumo del agente 1 son:

$$\begin{array}{rr} \text{nodo } e_0: & -2 \\ \text{nodo } e_{11}: & 2 \\ \text{nodo } e_{12}: & 0 \\ \text{nodo } e_{21}: & 4 \\ \text{nodo } e_{22}: & 1 \\ \text{nodo } e_{23}: & -1 \\ \text{nodo } e_{24}: & 0 \end{array}$$

Vamos calcular ahora la cartera z_s^1 del agente 1. Como sabemos, la cartera del agente 2 viene dada por $z_s^2 = -z_s^1$.

En el nodo e_{11}, el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 unidades del activo 2, de forma que esta cartera financia su exceso de consumo en los nodos e_{21} y e_{22},

$$\left.\begin{array}{ll} \theta_1 + 2\theta_2 & = 4 \\ \theta_1 + \theta_2 & = 1 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -2$ y $\theta_2 = 3$. El precio de esta cartera es

$$-2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 9$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera en el nodo e_{11} es $9 + 2 = 11$.

Análogamente en el nodo e_{12} el agente 1 compra θ_1 unidades del activo 1 y θ_2 del activo 2 de forma que

$$\left.\begin{array}{r} \theta_1 = -1 \\ \theta_1 + 2\theta_2 = 0 \end{array}\right\}$$

La solución de este sistema es $\theta_1 = -1$ y $\theta_2 = 1/2$. El precio de esta cartera es

$$(-1) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

Por tanto el exceso de consumo más el coste de la cartera es:

$$0 - \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}.$$

$$\left.\begin{aligned} 6\theta_1 + 7\theta_2 &= 11 \\ 2\theta_1 + \tfrac{2}{3}\theta_2 &= -\tfrac{5}{3} \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es

$$\theta_1 = -\frac{19}{10}, \qquad \theta_2 = \frac{16}{5}$$

Resumiendo, la cartera del agente 1 es

Nodo	Activo 1	Activo 2
e_0	-19/10	16/5
e_{11}	-2	3
e_{12}	-1	1/2

---

(3) **(2 puntos)**
Consideremos una economía secuencial con un bien, dos periodos y cuatro estados posibles en el segundo periodo. Supongamos que hay cuatro activos $r_1 = (1, 1, 1, 1)$, $r_2 = (2, 0, 2, 0)$, $r_3 = (2, 0, 0, 2)$ y $r_4 = (3, 1, 3, 1)$, cuyos precios son $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, $q_4 = 2$. Se pide:

(a) Calcular unas medidas de precios de equilibrio (probabilidades de riesgo neutro). Determinar si hay arbitraje en la economía. ¿Son completos los mercados?

(b) Determinar el conjunto de activos cuyo precio está determinado de forma única por los precios $q_1, \ldots, q_4$ de los activos $r_1, \ldots, r_4$ y la condición de no arbitraje en la economía. Encontrar una ecuación que caracterice ese conjunto.

(c) Se introduce un nuevo activo $r_5 = (0, 4, 0, 4)$. ¿Qué valoraciones de este activo son compatibles con la no existencia de arbitraje en la economía?

(d) Razonar que si el precio del activo $r_5 = (0, 4, 0, 4)$ es $q_5 = 3$ hay arbitraje en la Economía. Encontrar una estrategia de arbitraje.

Solución:

(a) Estudiamos el sistema

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 &= 1 \\ 2Q_1 + 2Q_3 &= 1 \\ 2Q_1 + 2Q_4 &= 1 \\ 3Q_1 + Q_2 + 3Q_3 + Q_4 &= 2 \end{aligned}$$

de las ecuaciones segunda y tercera vemos que

$$Q_3 = Q_4$$

y despejando en esas ecuaciones obtenemos

$$Q_1 = \frac{1}{2} - Q_4$$

y de la primera ecuación obtenemos ahora

$$Q_3 = 1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = 1 - \left(\frac{1}{2} - Q_4\right) - 2Q_4 = \frac{1}{2} - Q_4$$

por lo que las soluciones del sistema son de la forma

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} - Q_4 \\ Q_2 &= \frac{1}{2} - Q_4 \\ Q_3 &= Q_4 \end{aligned}$$

Para que todas las Q_s sean positivas, debe verificarse que

$$0 < Q_4 < \frac{1}{2}$$

Cualquiera de estos valores de Q_4 proporciona una solución con todas las Q_s positivas. Por tanto, no hay arbitraje. Como la solución no es única, los mercados no son completos.

(b) Partimos de la matriz

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_4 \end{matrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ (x_1 - x_2) - (x_1 - x_4) = x_4 - x_2 \end{matrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_4 - x_2 - (x_1 - x_3) \end{matrix} = 3$$

Por tanto, los activos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ cuyo precio está determinado por los activos $r_1, \ldots, r_4$ y la condición de no arbitraje en la economía, son aquellos que verifican la ecuación

$$x_4 - x_2 = x_1 - x_3$$

Q_s calculadas en el apartado anterior

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= Q_1x_1 + Q_2x_2 + Q_3x_3 + Q_4x_4 \\ &= \frac{x_1}{2} - Q_4x_1 + \frac{x_2}{2} - Q_4x_2 + Q_4x_3 + Q_4x_4 \\ &= \frac{x_1+x_2}{2} + (x_3 + x_4 - x_1 - x_2)Q_4\end{aligned}$$

Y para que no dependa de Q_4 debe verificarse que

$$x_3 + x_4 - x_1 - x_2 = 0$$

(c) El activo $r_5 = (0,4,0,4)$ verifica la ecuación $x_3 + x_4 - x_1 - x_2 = 0$ por lo que, para que no haya arbitraje su precio debería ser

$$\varphi(r_5) = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

(d) Si el precio del activo $r_5 = (0,4,0,4)$ es $q_5 = 3$, entonces, según el apartado anterior, debería haber arbitraje. Como el precio $q_5 = 3$ es mayor que el encontrado en el apartado anterior, la estrategia de arbitraje debería vender r_5 al corto. Por otra parte, vemos

$$r_5 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4$$

es decir,

$$(0,4,0,4) = \alpha_1(1,1,1,1) + \alpha_2(2,0,2,0) + \alpha_3(2,0,0,2) + \alpha_4(3,1,3,1)$$

obtenemos

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

es decir

$$r_5 = 4r_1 - 2r_2$$

Si ahora elegimos la cartera $z_1 = 5$, $z_2 = -2$, $z_5 = -1$ obtenemos que su precio (en $t = 0$) es

$$q_1z_1 + q_2z_2 + q_3z_3 + q_4z_4 = 5 - 2 - 3 = 0$$

mientras que los dividendos son

$$z_1r_1 + z_2r_2 + z_5r_5 = 5\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} > 0$$

por lo que esta cartera realiza el arbitraje.

---

(4) **(1 punto)**
Consideremos una economía con 2 periodos, 2 agentes, 1 bien y 2 estados en el segundo periodo, $t = 1$. La función de utilidad de los agentes es

$$u_i(x_1, x_2) = \pi^i u(x_1) + (1 - \pi^i)u(x_2) \quad i = 1, 2$$

con $1 > \pi^1 > \pi^2 > 0$. No hay incertidumbre agregada y los agentes son aversos al riesgo. ¿Se aseguran completamente en el equilibrio de Arrow-Debreu? Razonar la respuesta.

Solución:
Los óptimos de Pareto verifican la ecuación

$$\frac{\pi^1 u_1'(x_1^1)}{(1-\pi^1)u_1'(x_2^1)} = \frac{\pi^2 u_2'(x_1^2)}{(1-\pi^2)u_2'(x_2^2)}$$

Recordemos que asegurarse completamente significa que

$$x_1^1 = x_2^1, \quad x_1^2 = x_2^2$$

Si esto ocurriera entonces la primera ecuación se reduciría a

$$\frac{\pi^1}{1-\pi^1} = \frac{\pi^2}{1-\pi^2}$$

Pero como

$$\pi^1 > \pi^2$$

tenemos que

$$1 - \pi^1 < 1 - \pi^2$$

por lo que

$$1 < \frac{\pi^1}{\pi^2} = \frac{1-\pi^1}{1-\pi^2} < 1$$

lo cual es una contradicción. Concluimos que los agentes no se aseguran completamente.

---

(5) **(2 puntos)** Un contribuyente obtiene una renta y. Llamemos x a la cantidad que declara al rellenar su declaración de la renta. Suponemos que $x \le y$ y que su tipo impositivo es t, es decir el contribuyente declara a hacienda que debe pagar unos impuestos de tx. Con una probabilidad p, Hacienda inspecciona al contribuyente y descubre su verdadera renta. En este caso, el contribuyente debe pagar los impuestos correspondientes a su renta, es decir ty, más una multa $\theta(y - x)$ por la cantidad evadida. Si Hacienda no inspecciona al contribuyente, asume que la declaración presentada por éste es correcta.

(a) El agente tiene una utilidad sobre dinero $u(x)$ de la que sólo sabemos que es averso al riesgo. Supongamos que la tasa impositiva t y la multa θ están determinadas por el parlamento. Si Hacienda desea que el contribuyente declare su verdadera renta, ¿Cuál es la probabilidad mínima con la que Hacienda debe realizar la inspección?

la cantidad evadida por el agente.

Solución:

(a) El agente se queda con la renta $y - ty - \theta(y - x) = (1 - t - \theta)y + \theta x$ con probabilidad p e $y - tx$ con probabilidad $1 - p$. Por lo que, si declara que su renta es x, su utilidad esperada es

$$V(x) = pu\left((1 - t - \theta)y + \theta x\right) + (1 - p)u(y - tx)$$

Su objetivo es maximizar esta función. La condición de primer orden es

$$V'(x^*) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x^* = 0, \\ = 0 & \text{si } 0 < x^* < y, \\ \geq 0 & \text{si } x^* = y. \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $V(x)$ es cóncava y la condición de primer orden es suficiente para un máximo. En particular, para que el máximo se alcance en $x^* = y$ deber verificarse que

$$V'(y) = p\theta u'\left((1 - t - \theta)y + \theta x\right) - (1 - p)tu'(y - tx)|_{x=y} \geq 0$$

es decir,

$$p\theta u'(y - ty) - (1 - p)tu'(y - ty) = \left(p\theta - (1 - p)t\right)u'(y - ty) \geq 0$$

Como $u'(y - ty) > 0$, debe verificarse que

$$p\theta - (1 - p)t \geq 0$$

es decir,

$$p \geq \frac{t}{\theta + t}$$

(b) Vemos que

$$p = 0'1 < \frac{t}{\theta + t} = 1'3$$

por lo que la solución es interior. La condición de primer orden (calculada en el apartado anterior) se reduce a

$$p\theta u'((1 - t - \theta)y + \theta x) - (1 - p)tu'(y - tx) = 0$$

es decir,

$$\frac{p\theta}{\sqrt{((1 - t - \theta)y + \theta x)}} = \frac{(1 - p)t}{\sqrt{y - tx}}$$

o sea,

$$p^2\theta^2 y - p^2\theta^2 tx = (1 - p)^2 t^2 (1 - t - \theta)y + \theta(1 - p)^2 t^2 x$$

de donde

$$x^* = \frac{p^2\theta^2 - (1 - p)^2 t^2 (1 - t - \theta)}{p^2\theta^2 t + \theta(1 - p)^2 t^2} y \approx 17081.1$$

---

(6) **(1 punto)**
Consideremos un agente con unas preferencias sobre cantidades monetarias representadas por la función de utilidad $u(x)$ y unas preferencias sobre loterías que verifican los axiomas del Teorema de la Utilidad Esperada. Supongamos que el agente es estrictamente averso al riesgo (es decir $u''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) y que su riqueza inicial es w. El agente tiene la posibilidad de elegir una cartera con dos activos: El primero es un activo seguro que cuesta 1 unidad monetaria y paga unos dividendos de 1 unidad monetaria. El segundo es un activo de riesgo que cuesta 1 unidad monetaria y tiene un pago aleatorio con una función de distribución $F(z)$ y un pago esperado

$$\int z\,dF(z) > 1$$

Probar que si el coeficiente de aversión al riesgo es decreciente en la renta, entonces la cantidad óptima de activo de riesgo que el agente compra es creciente en w.

Solución:

Si el agente compra α unidades del activo de riesgo y β unidades del activo seguro, entonces

paga $\alpha + \beta$

recibe $\alpha z + \beta$ si ocurre el estado z.

Por tanto, dado que tiene una riqueza inicial w, el agente elige α y $\beta = w - \alpha$ tales que maximizan su utilidad esperada,

$$\varphi(\alpha) = \int u(z\alpha + \beta)d\,F(z) = \int u(z\alpha + w - \alpha)d\,F(z)$$

Se comprueba fácilmente que $\varphi''(\alpha(w)) \leq 0$, por lo que la función $\varphi(\alpha) = \int u(z\alpha + w - \alpha)d\,F(z)$ es cóncava y las condiciones de primer orden determinan la solución. Sea $\alpha(w)$ la solución de este problema y supongamos que es interior. La condición de primer orden es

$$\varphi'(\alpha(w)) = \int u'(z\alpha(w) + w - \alpha(w))(z - 1)d\,F(z) = 0$$

Derivando implícitamente la ecuación $\varphi'(\alpha(w)) = 0$, respecto a w, obtenemos

$$\int u''(\alpha z + w - \alpha)(z - 1)d\,F + \int \alpha'(w)u''(\alpha z + w - \alpha)(z - 1)^2 d\,F = 0$$

Despejando $\alpha'(w)$ obtenemos

$$\alpha'(w) = \frac{-\int u''(\alpha z + w - \alpha)(z - 1)d\,F}{\int u''(\alpha z + w - \alpha)(z - 1)^2 d\,F}$$

aversión absoluta al riesgo es

$$R_a(x) = R_a(x, u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

podemos despejar

$$-u''(\alpha z + w - \alpha) = u'(\alpha z + w - \alpha) R_a(\alpha + w - \alpha z)$$

en el numerador y obtenemos

$$\begin{aligned} -\int u''(\alpha z + w - \alpha)(z-1)d\,F = \\ = \int u'(\alpha z + w - \alpha) R_a(\alpha z + w - \alpha)(z-1)d\,F = A \end{aligned}$$

Consideremos dos casos:

(a) En primer lugar, supongamos que $z - 1 > 0$. Entonces, $w + \alpha(z-1) > w$. Y, como R_a es decreciente (ya que $R'_a \leq 0$), tenemos que $R_a(\alpha z + w - \alpha) \leq R_a(w)$. Y como $z - 1 > 0$, entonces

$$(z-1)R_a(w) \geq (z-1)R_a(\alpha z + w - \alpha)$$

(b) En caso contrario, tenemos que $z-1 < 0$. Entonces, $\alpha z + w - \alpha = w + \alpha(z-1) < w$ y como R_a es decreciente, $R_a(\alpha z + w - \alpha) \geq R_a(w)$. Utilizando que $z - 1 < 0$, vemos que, de nuevo,

$$(z-1)R_a(w) \geq (z-1)R_a(\alpha z + w - \alpha)$$

Por tanto, teniendo en cuenta ambos casos, se verifica que

$$\begin{aligned} A &< \int u'(\alpha z + w - \alpha) R_a(w)(z-1)d\,F \\ &= R_a(w) \int u'(\alpha z + w - \alpha)(z-1)d\,F \\ &= R_a(w) \cdot \varphi'(\alpha(w)) = 0 \end{aligned}$$

Recordando que, A es el numerador de $\alpha'(w)$ y que el denominador era negativo, obtenemos que $\alpha'(w) > 0$.