MICROECONOMÍA AVANZADA

Examen Final - Junio 2014

SOLUCIONES

Instrucciones: El examen consta de cuatro preguntas. Tiene un máximo de dos hora para responder, de forma razonada, a todos los ejercicios. Las calculadoras no están permitidas. Realice el examen íntegramente en bolígrafo.

1 Se pide que: (20 puntos)

(a) Defina el concepto de dominancia estocástica de primer orden.

(b) Sean F y G dos loterías tales que F domina a G según el criterio de dominancia estocástica de primer orden. Si un agente es averso al riesgo, ¿podemos decir si preferirá una lotería a la otra? Y de ser así, ¿cuál elegiría?

(c) Considere las siguientes loterías

$$L_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 4, 0\right) \quad \text{y} \quad L_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 8, 0\right).$$

¿Cuál de ellas preferirá un agente averso al riesgo?

Solución.

(a) Sean F y G dos loterías, decimos que F domina a G en el sentido de dominancia de primer orden si $F(x) \leq G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) El agente prefiere la lotería F porque le reporta mayor utilidad esperada.

(c) Tenemos que

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}, \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 0 \leq x < 8 \\ 1 & \text{si } 8 \leq x \end{cases}$$

Sea $\Phi_i(t) = \int_{-\infty}^{t} F_i(x)dx$, podemos comprobar que $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consecuentemente, L_1 domina a L_2 en sentido de dominancia estocástica de primer orden.

2 En el futuro hay dos posibles estados posibles $\{1, 2\}$ que ocurren con probabilidades $p > 2/5$ y $1 - p$. El agente puede elegir entre dos activos, $r_1 = (2, 6)$ y $r_2 = (6, 8)$ cuyos precios son, respectivamente $q_1 = 2$ y $q_2 = 4$. La riqueza inicial del agente es w_0. Llamamos α a la cantidad de activo r_2 que compraría el agente. La función de utilidad monetaria del agente es $v(x) = \ln x$. (20 puntos)

(a) ¿Es este agente adverso al riesgo?

(b) Calcule la cantidad óptima α de activo r_2 que debería comprar el agente.

(c) ¿Cuál sería el valor de α si los precios fuesen $q_1 = 4$ y $q_2 = 2$?

Solución.

(a) Sí es averso al riesgo, pues su utilidad monetaria $v(x) = \ln(x)$ es cóncava.

(b) La restricción presupuestaria es $2a_1 + 4a = w_0$ (siendo a_1 la cantidad de activo 1), con lo que $a_1 = \frac{w_0}{2} - 2a$. La cantidad que el agente consigue en futuro, que depende del estado del mundo, es

$$w_1(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{w_0}{2} - 2a\right) + 6a, & x = 1 \\ 6\left(\frac{w_0}{2} - 2a\right) + 8a, & x = 2 \end{cases}$$

Consecuentemente, la función de utilidad esperada de este agente es:

$$U(a) = p \cdot v\left(2\left(\frac{w_0}{2} - 2a\right) + 6a\right) + (1 - p) \cdot v\left(6\left(\frac{w_0}{2} - 2a\right) + 8a\right).$$

Es decir,

$$U(a) = p \cdot \ln(w_0 + 2a) + (1-p) \cdot \ln(3w_0 - 4a).$$

Para obtener la cantidad óptima, derivamos e igualamos a cero,

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0 \quad \equiv \quad \frac{2p}{w_0 + 2a} - \frac{4(1-p)}{3w_0 - 4a} = 0 \quad \equiv \quad a^* = \frac{w_0(5p-2)}{4}.$$

(c) Notar que el activo 2 es más rentable que el activo 1 en cualquier estado del mundo. Si además dicho activo es más barato, entonces el agente invertirá toda su riqueza en comprar activo 2. Así, $a = w_0$.

3 Considere una economía con dos consumidores y dos bienes. Las dotaciones iniciales son $\omega_1 = \omega_2 = (2,3)$ y las preferencias vienen dadas por las siguientes funciones de utilidad: (25 puntos)

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}^{\alpha} \quad \text{y} \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21}^2 + x_{22}^2 \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}_{++}.$$

(a) Calcule el equilibrio general competitivo.

(b) Obtenga el conjunto de todas las asignaciones Pareto eficientes si las dotaciones iniciales fuesen $\omega_1 = (3,1)$ y $\omega_2 = (2,2)$.

Solución.

(a) Notar en primer lugar que la utilidad del consumidor 1 sólo depende del primer bien, así $x_{12}^* = 0$ y $x_{22}^* = 6$. Por otro lado, como las curvas de indiferencia del consumidor 2 son convexas, las posibles soluciones de su problema de maximización son frontera, esto es, $z_2(p) \subseteq \left\{\left(0, \frac{2p_1+3p_2}{p_2}\right), \left(\frac{2p_1+3p_2}{p_1}, 0\right)\right\}$. Como ya sabemos que $x_{22}^* = 6$, necesariamente debe cumplirse que $x_{21}^* = 0$ y que $\frac{2p_1+3p_2}{p_1} = 6$. Por lo tanto, $x_{11}^* = 4$ y $p_1 = \frac{3}{2}p_2$.

(b) Al igual que antes, el consumidor 1 sólo recibe utilidad de consumir el primer bien, así $x_{12} = 0$ y $x_{22} = 5$. Las funciones de utilidad quedan como $u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}^{\alpha}$ y $u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21}^2 + 9$, que pueden transformarse en $\bar{u}_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}$ y $\bar{u}_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21}$. Entonces las asignaciones Pareto eficientes serán $x_{11} = t$ y $x_{21} = 5 - t$ con $t \in [0,5]$, $x_{12} = 0$, $x_{22} = 3$.

4 Consideremos una economía a con dos periodos, un único bien y dos agentes. En $t = 1$ hay dos posibles estados. Las funciones de utilidad de los agentes son

$$u_1(x_1^1, x_1^2) = (x_1^1 x_1^2)^2$$
$$u_2(x_2^1, x_2^2) = \ln x_2^1 + \ln x_2^2,$$

y los recursos iniciales son $\omega_1 = (0,4)$, $\omega_2 = (4,0)$. Supongamos que hay dos activos $r_1 = (0,1)$ y $r_2 = (1,0)$. Encontrar, si existe, el equilibrio de Radner de esta economía. (35 puntos)

Solución. En primer lugar nos fijamos en que la return matrix es completa, por lo que las asignaciones del equilibrio de Radner coinciden con las asignaciones de equilibrio de Arrow-Debreu, que calcularemos a continuación. Notar que ambos consumidores están en situaciones simétricas (tienen las mismas dotaciones iniciales duales y aunque las funciones de utilidad son diferentes, representan las mismas preferencias), por lo que es fácilmente comprobable que en equilibrio debe ocurrir que:

$$(x_1^1)^* = (x_2^1)^* = 2, \quad (x_1^2)^* = (x_2^2)^* = 2, \quad p^1 = p^2$$

Con esta información podemos escribir los problemas de optimización (incluyendo los activos) de cada uno de los consumidores:

$$\left.\begin{array}{ll} \max_{z_{11}, z_{12}} & \ln x_1^1 + \ln x_1^2 \\ \text{s.t.} & \\ & q_1 z_{11} + q_2 z_{12} = 0 \\ & 2p^1 = 0p^1 + p^1(z_{11}0 + z_{12}1) \\ & 2p^2 = 4p^2 + p^2(z_{11}1 + z_{12}0) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll} \max_{z_{21}, z_{22}} & \ln x_2^1 + \ln x_2^2 \\ \text{s.t.} & \\ & q_1 z_{21} + q_2 z_{22} = 0 \\ & 2p^1 = 4p^1 + p^1(z_{21}0 + z_{22}1) \\ & 2p^2 = 0p^2 + p^2(z_{21}1 + z_{22}0) \end{array}\right\},$$

e imponer el vaciado de mercados de activos:

$$z_{11} + z_{21} = 0, z_{12} + z_{22} = 0$$

De todo lo anterior obtenemos que, en equilibrio,

$$z_{11}^* = -2, \quad z_{21}^* = 2, \quad z_{12}^* = 2, \quad z_{22}^* = -2$$

Sustituyendo calculamos también el precio de los activos en equilibrio: $q_1^* = q_2^*$.