UC3M
Matemáticas para la Economía II
Examen Final 31 de mayo de 2024 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las variables (x, y, z, t), donde m es un parámetro:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & -z & +2t & = & 2 \\ 2x & +5y & & -t & = & -1 \\ 3x & +3y & -z & -3t & = & 1 \\ 4x & +y & -2z & +t & = & m \end{array}\right.$$

(a) (10 puntos) Estudie el sistema según los valores de m.

(b) (10 puntos) Resuelva el sistema para aquellos valores de m para los que el sistema sea compatible.

Solución:

La matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & +2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & m \end{array}\right)$$

Restamos la primera multiplicada por 2, 3 y 4 a la segunda, tercera y cuarta fila, respectivamente, con el fin de conseguir una matriz equivalente a la ampliada con ceros en la primera columna debajo del elemento pivote. Obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & +2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -7 & m-8 \end{array}\right)$$

Ahora restamos la segunda fila a la tercera y a la cuarta.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & +2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & m-3 \end{array}\right)$$

Esta matriz no está en forma reducida, podemos hacer una nueva operación elemental para obtener

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & +2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-3 \end{array}\right)$$

(a) Vemos que el rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada coincide si y sólo si $m = 3$. En este caso el sistema es compatible indeterminado, ya que el rango de la matriz del sistema no es máximo. Cuando $m \neq 3$ el sistema es incompatible.

(b) Para resolver el sistema, substituimos en el sistema reducido $m = 3$ y resolvemos desde la última a la primera ecuación

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & -z & +2t & = & 2 \\ & 9y & +2z & -5t & = & -5 \\ & & & -4t & = & 0 \end{array}\right.$$

obteniendo $t = 0$. Tomando z como parámetro, tenemos

$$9y + 2z = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{9} - \frac{2z}{9},$$

$$x - 2y - z = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{10}{9} - \frac{4z}{9} + z = \frac{8}{9} + \frac{5z}{9}.$$

Luego las soluciones son

$$\left(\frac{8}{9}, -\frac{5}{9}, 0, 0\right) + z\left(\frac{5}{9}, -\frac{2}{9}, 1, 0\right),$$

donde z puede tomar cualquier valor.

$\boxed{2}$

Se considera la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 \\ -1 & 0 & m+1 \end{pmatrix},$$

donde m es un parámetro.

(a) (10 puntos) La matriz A es diagonalizable para todo m. ¿Por qué? Hallar los valores y vectores propios de A y determina una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que $P^{-1}AP = D$.

(b) (10 puntos) Clasificar la forma cuadrática Q definida por la matriz A.

Solución:

(a)

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} m+1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & m-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & m+1-\lambda \end{vmatrix} = (m-\lambda) \begin{vmatrix} m+1-\lambda & -1 \\ -1 & m+1-\lambda \end{vmatrix}$$

es decir

$$p_A(\lambda) = (m-\lambda)((m+1-\lambda)^2 - 1).$$

Este polinomio tiene raíces $\lambda_1 = m$, doble, y $\lambda_2 = m+2$, simple. El rango de

$$A - mI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es 1, que coincide con la diferencia entre la dimensión de la matriz A (3) y la multiplicidad del autovalor (2). Luego, la matriz es diagonalizable para cualquier valor de m. (Podría haberse contestado afirmativamente a esta pregunta antes de hacer los cálculos, ya que A es una matriz simétrica para todo m).

Vectores propios asociados a $\lambda_1 = m$: son soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A - mI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obviamente este sistema se reduce a la ecuación $x - z = 0$. Luego, dos vectores representativos son $(1,0,1)$ y $(0,1,0)$.

Vectores propios asociados a $\lambda_1 = m+2$: son soluciones del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A - (m+2)I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es decir, $-x - z = 0$ y $-2y = 0$. Un vector representativo es $(1,0,-1)$.

Resumiendo, podemos tomar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}.$$

(b) Estudiaremos el signo de los valores propios de A. Por el apartado anterior, los valores propios de A son m y $m+2$. Luego, si $m > 0$, la forma cuadrática es definida positiva, si $m = 0$ es semidefinida positiva, si $m < -2$ es definida negativa y si $m = -2$ es semidefinida negativa. Para valores $m \in (-2,0)$, la forma cuadrática es indefinida, ya que hay valores propios positivos y negativos.

$\boxed{3}$

Se considera la región del plano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}.$$

(a) (10 puntos) Representar A.

(b) (10 puntos) Calcular la integral doble

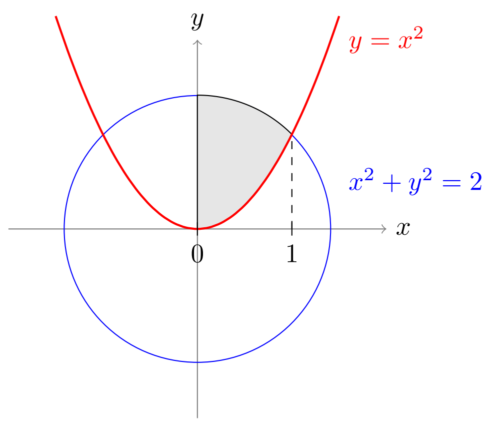
$$\iint_A x \, dxdy.$$

Solución:

(a) $x^2 + y^2 = 2$ ese la ecuación de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$. Los puntos de corte de la circunferencia con la parábola se obtienen al resolver

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 2, \\ x^2 - y &= 0, \end{cases}$$

obteniendo $y + y^2 = 2$, es decir, $y = 1$ y entonces $x^2 = 1$ o $x = 1$ (rechazamos $x = -1$, ya que x no puede ser negativa, así como $y = -2$, ya que debe ser $y = x^2 \geq 0$). La región es la parte del círculo $x^2 + y^2 \leq 2$ que está por encima de la parábola en el primer cuadrante. Es la zona sombreada del círculo.



(b)

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy = \int_0^1 x(\sqrt{2-x^2} - x^2) \, dx$$
$$= \int_0^1 x\sqrt{2-x^2} \, dx - \int_0^1 x^3 \, dx.$$

La primera integral es inmediata, o bien puede hacerse el cambio de variable $t = 2 - x^2$, $dt = -2x \, dx$. Entonces

$$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2} \, dx = \int_2^1 -\frac{1}{2}\sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Por otra parte, $\int_0^1 x^3 \, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$. En definitiva, la integral pedida tiene el valor

$$\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{12}.$$

$\boxed{4}$

Estudie las siguientes integrales impropias, clasificándolas en convergentes o divergentes, según correspon-da. En el caso de que alguna de ellas sea convergente, calcule su valor.

(a) (10 puntos)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x}.$$

(b) (10 puntos)

$$\int_1^\infty \frac{2x+1}{(x^2+x)^3}\,dx.$$

Solución:

(a) Dado que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2+x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1,$$

la integral tiene el mismo carácter que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x},$$

que es divergente.

Otra forma: $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$, con $A = 1$ y $B = -1$. Luego

$$\int \frac{dx}{x^2+x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C.$$

Por tanto,

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^2+x} = \lim_{a\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{a}{a+1}\right)\right) = -\infty.$$

(b) El numerador del integrando, $2x+1$, es la derivada de x^2+x, luego el integrando admite la primitiva

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x)^2}.$$

Por tanto

$$\int_1^\infty \frac{2x+1}{(x^2+x)^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x)^2}\Big|_1^b = \frac{1}{8} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{(b^2+b)^2} = \frac{1}{8}.$$

$\boxed{5}$

(a) (10 puntos) Calcule el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1+p^n},$$

donde $p > 0$ es un parámetro. *Nota:* $p^n \to 0$ *si* $0 < p < 1$ *y* $p^n \to \infty$ *si* $p > 1$*, cuando* $n \to \infty$*.*

(b) (10 puntos) Estudie el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{1+p^n},$$

donde $p > 0$ es un parámetro. *Nota: use la parte (a).*

Solución:

(a) Cuando $p = 1$, la sucesión $\frac{p^n}{1+p^n} = \frac{1}{2}$ es constante, luego el límite es $\frac{1}{2}$. Para valores $p \neq 1$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1+p^n} = \frac{0}{1+0} \quad \text{si } 0 < p < 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{1+p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^{-n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1 \quad \text{si } p > 1.$$

(b) Cuando $p \geq 1$ el término general de la serie no converge a 0 (parte (a)), luego la serie no es convergente. Es una serie de términos positivos, luego podemos aplicar el criterio del cociente en el caso $p < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p^{n+1}}{1+p^{n+1}}}{\frac{p^n}{1+p^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{p+p^{n+1}}{1+p^{n+1}} = \frac{p+0}{1+0} = p < 1.$$

En definitiva, la serie converge si y sólo si $p < 1$.