

**UC3M**

**Matemáticas para la Economía II**  
**Examen Final 31 de mayo de 2024**

Niu: \_\_\_\_\_ Group: \_\_\_\_\_

**Nombre:** \_\_\_\_\_

|           |    |    |    |    |    |       |
|-----------|----|----|----|----|----|-------|
| Ejercicio | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | Total |
| Puntos    | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100   |
| Nota      |    |    |    |    |    |       |

1 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las variables  $(x, y, z, t)$ , donde  $m$  es un parámetro:

$$\begin{cases} x - 2y - z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - t = -1 \\ 3x + 3y - z - 3t = 1 \\ 4x + y - 2z + t = m \end{cases}$$

- (a) (10 puntos) Estudie el sistema según los valores de  $m$ .
- (b) (10 puntos) Resuelva el sistema para aquellos valores de  $m$  para los que el sistema sea compatible.
-

2

Se considera la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 \\ -1 & 0 & m+1 \end{pmatrix},$$

donde  $m$  es un parámetro.

- (a) (10 puntos) La matriz  $A$  es diagonalizable para todo  $m$ . ¿Por qué? Hallar los valores y vectores propios de  $A$  y determina una matriz regular  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tales que  $P^{-1}AP = D$ .
- (b) (10 puntos) Clasificar la forma cuadrática  $Q$  definida por la matriz  $A$ .
-

3

Se considera la región del plano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}.$$

- (a) (10 puntos) Representar  $A$ .
- (b) (10 puntos) Calcular la integral doble

$$\iint_A x \, dx \, dy.$$

---

4

Estudie las siguientes integrales impropias, clasificándolas en convergentes o divergentes, según correspon-da. En el caso de que alguna de ellas sea convergente, calcule su valor.

(a) (10 puntos)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x}.$$

(b) (10 puntos)

$$\int_1^{\infty} \frac{2x + 1}{(x^2 + x)^3} dx.$$

---

5

(a) (10 puntos) Calcule el valor del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{1 + p^n},$$

donde  $p > 0$  es un parámetro. *Nota:*  $p^n \rightarrow 0$  si  $0 < p < 1$  y  $p^n \rightarrow \infty$  si  $p > 1$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

(b) (10 puntos) Estudie el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{1 + p^n},$$

donde  $p > 0$  es un parámetro. *Nota:* use la parte (a).

---