UC3M
Matemáticas para la Economía II (examen final)
31 de mayo de 2023 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Se considera el sistema ecuaciones lineales que depende de a y b

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & + & (2b-2)t & = & 2 \\ & - & y & + & bz & - & 2t & = & 2 \\ -x & + & (b-2)y & - & 5z & + & 2t & = & a \end{array}\right.$$

(a) (15 puntos) Discuta el sistema según los valores de a y b. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, indique de cuántos parámetros depende el conjunto de soluciones.

(b) (5 puntos) Halla la solución o soluciones del sistema cuando $b = -3$ y $a = 4$.

Solución:

(a) La matriz ampliada A^* del sistema en forma escalonada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & (2b-2) & 2 \\ 0 & -1 & b & -2 & 2 \\ 0 & 0 & b^2-9 & 0 & a+2+2b \end{array}\right)$$

(Se obtiene con las siguientes operaciones en la matriz A^*: sumar la primera fila a la tercera y en la matriz que resulta, multiplicar la segunda fila por b y sumar el resultado a la tercera fila).

Vemos que el rango de A y de A^* coinciden si $b^2 \neq 9$, siendo igual a 3, y también cuando $b^2 = 9$ y $a+2+2b = 0$, en cuyo caso el rango es 2.

En resumen: el sistema es compatible indeterminado si

- $b^2 \neq 9$, con soluciones uni-paramétricas
- $b^2 = 9$ y $a + 2 + 2b = 0$ (es decir, $b = 3$ y $a = -8$ o $b = -3$ y $a = 4$), con soluciones bi-paramétricas

El sistema es incompatible si $b^2 = 9$ y $a + 2 + 2b \neq 0$

(b) Tomando como parámetros z y t: $(x, y, z, t) = (6 + 10z + 12t, -2 - 3z - 2t, z, t)$ son todas las soluciones, que se han obtenido resolviendo el sistema escalonado cuando $b = -3$ y $a = 4$.

$\boxed{2}$

Se considera la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) (10 puntos) Encuentre los valores propios y los vectores propios de la matriz A. ¿Es la matriz diagonalizable?

(b) (10 puntos) La matriz A es la matriz de una forma cuadrática Q. Clasifique Q en los dos casos siguientes: (i) en $\mathbb{R}^3$; (ii) restringida al plano $2x + y = 0$.

Solución:

(a) Los valores propios son raíces del polinomio característico $-(2+\lambda)\,(-(2-\lambda)(1+\lambda)-4)$, es decir, $\lambda = -2$ doble y $\lambda = 3$, simple.

La matriz es diagonalizable ya que es simétrica.

Los subespacios propios son $S(-2) = \langle (1,-2,0), (0,0,1) \rangle$ y $S(3) = \langle (2,1,0) \rangle$.

(b) La forma cuadrática es indefinida, ya que los valores propios tienen signo contrario. Al restringir Q al plano $y = -2x$, la forma cuadrática restringida es

$$\begin{pmatrix} x & -2x & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 - (-2x)^2 - 2z^2 + 4(-2x^2) = -10x^2 - 2z^2,$$

claramente definida negativa.

$\boxed{3}$

Se considera la región del plano

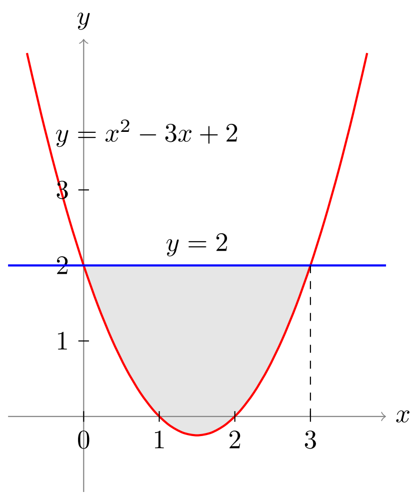
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geq x^2 - 3x + 2, \; y \leq 2\}.$$

(a) (10 puntos) Representar S y calcular el área de S.

(b) (10 puntos) Encontrar el valor de la integral doble $\iint_S x\, dxdy$, donde S es la región dada más arriba.

Solución:

(a) El recinto S se representa más abajo. Notar que $x^2 - 3x + 2 \leq y \leq 2$ si y sólo si $0 \leq x \leq 3$.



El área de S es el valor de la integral

$$\iint_S 1\, dxdy = \int_0^3 \left(\int_{x^2-3x+2}^{2} 1\, dy \right) dx = \int_0^3 (\cancel{2} - x^2 + 3x - \cancel{2})\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=3} = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}.$$

(b)

$$\iint_S x\, dxdy = \int_0^3 x \left(\int_{x^2-3x+2}^{2} dy \right) dx = \int_0^3 x(\cancel{2} - x^2 + 3x - \cancel{2})\, dx = -\frac{x^4}{4} + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_{x=0}^{x=3} = -\frac{81}{4} + 27 = \frac{27}{4}.$$

$\boxed{4}$

(a) (10 puntos) Calcular el valor de la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x}\,dx.$$

Pista: descomponer $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)}$ en fracciones simples y usar después las propiedades del logaritmo $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ y $a\ln b = \ln(b^a)$.

(b) (10 puntos) La función continua $f : [0,\infty) \to (0,1]$ cumple

$$\int_0^x \frac{t}{f(t)}\,dt = \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt$$

para todo $x \geq 0$. Halla $f(x)$. Pista: utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo (o su generalización, la Regla de Leibniz).

Solución:

(a) Decomposing the integrand into simple fractions, we obtain

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Thus

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Hence

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Thus

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Bigg|_{x=1}^{b} = \lim_{b\to\infty} \ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} - \ln\frac{1}{\sqrt{1+1}} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

(b) Podemos derivar a ambos lados de la igualdad

$$\int_0^x \frac{t}{f(t)}\,dt = \int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt$$

para obtener

$$\frac{x}{f(x)} = 2xe^{x^4}, \quad \text{luego} \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-x^4}.$$

$\boxed{5}$

(a) (10 puntos) Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, que satisface $x_1 = -6$ y $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 3$, para $n \geq 1$.

(i) Probar que la sucesión es creciente.

(ii) Probar que la sucesión está acotada entre -6 y 12, es decir, que $-6 \leq x_n \leq 12$ para todo n

(iii) Deducir que la sucesión es convergente y hallar su límite.

(b) (10 puntos) Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

es convergente. Si sumamos los cuatro primeros términos de la serie, ¿cuál es el error máximo que se comete al decir que la suma de la serie infinita es la suma de los cuatro primeros términos? Este error, ¿es por exceso o por defecto? .

Solución:

(a) Converge a 9.

Notar que $x_2 = 1 > -6 = x_1$. Suponiendo que $x_{n-1} < x_n$, tenemos

$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} + 3 < \frac{2}{3}x_n + 3 = x_{n+1},$$

luego por el principio de inducción, la sucesión es monótona creciente.

Veamos que $-6 \leq x_n \leq 12$ para todo n. Para $n = 1$ se cumple; supongamos que es cierto para n y veamos que también lo es para $n + 1$.

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 3 \geq \frac{2}{3}(-6) + 3 = -1 > -6$$

y

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 3 \leq \frac{2}{3}(12) + 3 = 11 < 12,$$

luego por el principio de inducción, la sucesión está acotada entre -6 y 12.

Dado que la sucesión es monótona y acotada, es convergente a un límite L. Para hallar L resolvemos la ecuación

$$L = \frac{2}{3}L + 3 \;\Rightarrow\; L = 9.$$

(b) La serie es convergente por el Teorema de Leibniz (y por comparación también, con la serie de Euler).

$S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ aproxima por defecto el valor de la suma infinita, S, ya que se trunca la serie en un número par de términos. El máximo error cometido es el primer término despreciado, que es $x_5 = \frac{1}{25} = 0,04$.