UCЗM Niu: ____________ Grupo: ______

Matemáticas para la Economía II (examen final)

31 de mayo de 2023 **Nombre:** ____________________

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos	20	20	20	20	20	100
Nota						

1

Se considera el sistema ecuaciones lineales que depende de a y b

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 4z & + & (2b-2)t & = & 2 \\ & - & y & + & bz & - & 2t & = & 2 \\ -x & + & (b-2)y & - & 5z & + & 2t & = & a \end{array}\right.$$

(a) (15 puntos) Discuta el sistema según los valores de a y b. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, indique de cuántos parámetros depende el conjunto de soluciones.

(b) (5 puntos) Halla la solución o soluciones del sistema cuando $b=-3$ y $a=4$.

2

Se considera la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) (10 puntos) Encuentre los valores propios y los vectores propios de la matriz A. ¿Es la matriz diagonalizable?

(b) (10 puntos) La matriz A es la matriz de una forma cuadrática Q. Clasifique Q en los dos casos siguientes: (i) en $\mathbb{R}^3$; (ii) restringida al plano $2x+y=0$.

3

Se considera la región del plano

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y\geq x^2-3x+2,\ y\leq 2\}.$$

(a) (10 puntos) Representar S y calcular el área de S.

(b) (10 puntos) Encontrar el valor de la integral doble $\iint_S x\,dxdy$, donde S es la región dada más arriba.

4

(a) (10 puntos) Calcular el valor de la integral

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3+x}\,dx.$$

Pista: descomponer $\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}$ en fracciones simples y usar después las propiedades del logaritmo $\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ y $a\ln b=\ln(b^a)$.

(b) (10 puntos) La función continua $f:[0,\infty)\to(0,1]$ cumple

$$\int_0^x\frac{t}{f(t)}\,dt=\int_0^{x^2}e^{t^2}\,dt$$

para todo $x\geq 0$. Halla $f(x)$. Pista: utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo (o su generalización, la Regla de Leibniz).

5

(a) (10 puntos) Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, que satisface $x_1=-6$ y $x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+3$, para $n\geq 1$.

(i) Probar que la sucesión es creciente.

(ii) Probar que la sucesión está acotada entre -6 y 12, es decir, que $-6\leq x_n\leq 12$ para todo n

(iii) Deducir que la sucesión es convergente y hallar su límite.