$\boxed{1}$

Dado el parámetro $m \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (10 puntos) Estudie el rango de $A$, teniendo en cuneta los valores de $m$. Pista: Si necesita encontrar la raíces del determinante de $A$, puede utilizar la Regla de Ruffini, teniendo en cuenta que $m = 1$ es una raíz del determinante de $A$.

(b) (10 puntos) Dado que $A$ es simétrica, es la matriz de una forma cuadrática $Q$. Clasifique la forma cuadrática según los valores del parámetro $m$.

---

**Solución:**

(a) Tras hacer ceros en la primera columna, el determinante de $A$ es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 0 & (1-m^2) & (m-m^2) \\ 0 & (m-m^2) & (1-m^2) \end{vmatrix} = (1-m^2)^2 - (m-m^2)^2 = 2m^3 - 3m^2 + 1.$$

Dado que claramente $|A| = 0$ cuando $m = 1$, el polinomio obtenido es divisible por $m - 1$. Mediante la Regla de Ruffini aplicada dos veces, obtenemos $|A| = 2(m-1)^2(m + \frac{1}{2})$.

Caso 1. $m \neq 1$ y $m \neq -\frac{1}{2}$: el rango es 3, dado que $|A| \neq 0$.

Caso 2. $m = -\frac{1}{2}$: el rango es 2, dado que $|A| = 0$, pero el menor de orden 2 formado por las líneas 1 y 2 de la matriz es no nulo, $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0$.

Caso 3. $m = 1$: todas las filas de $A$ son iguales, luego el rango es 1.

(b) Sean los menores principales $D_1$, $D_2$ and $D_3$. Entonces $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = 1-m^2$ y $D_3 = |A| = 2(m-1)^2(m+\frac{1}{2})$ fue calculado en el apartado anterior.

La única posibilidad para $Q$ es ser positiva; imponemos en primer lugar $D_2 > 0$, es decir $|m| < 1$.

El signo de $D_3$ es positivo si y sólo si $(m + \frac{1}{2}) > 0$ y $m \neq 1$, es decir $m > -\frac{1}{2}$ y $m \neq 1$.

Luego $Q$ es definida positiva si y sólo si $-\frac{1}{2} < m < 1$. Por otra parte, es semidefinida positiva cuando $m = -\frac{1}{2}$ o $m = 1$.

Para el resto de valores def $m$, $Q$ is indefinida.

$\boxed{2}$

Dado el parámetro $a$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ -1 & -a & -1 \\ 2a & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) (10 puntos) Estudie si $A$ es diagonalizable. Para los valores de $a$ para los que la matriz $A$ es diagonalizable, calcule los valores y los vectores propios.

(b) (10 puntos) IEn los casos en los que la matriz $A$ es diagonalizable, encuentre una matriz diagonal $D$ y una matriz $P$ tales que $P^{-1}AP = D$. Encuentre $P^{-1}$ de forma explícita.

---

**Solución:**

(a) Polinomio característico: $-(\lambda + a)\left((\lambda - a)^2 - 4a^2\right)$.

Raíces: $\lambda = -a$ and $\lambda = 3a$. Notar que $(\lambda - a)^2 - 4a^2 = 0$ sii $\lambda - a = \pm 2a$.

Caso $a = 0$: el valor propio $\lambda = 0$ tiene multiplicidad 3. La matriz no es diagonalizable.

Caso $a \neq 0$: $\lambda = -a$ es un autovalor doble y $\lambda = 3a$ lo es simple.

El rango de la matriz

$$A + aI_3 = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 2a \\ -1 & 0 & -1 \\ 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

es 1 para todo $a \neq 0$, luego $A$ es diagonalizable para todo $a \neq 0$.

Los subespacios propios son: $S(-a) = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle$ and $S(3a) = \langle (1, -\frac{2}{a}, 1) \rangle$. Esto puede determinarse fácilmente a partir de los siguientes sistemas lineales:

$$S(-a) \quad \left\{ \begin{array}{rrl} 2ax & +2az & = 0 \\ -x & -z & = 0 \\ 2ax & +2az & = 0 \end{array} \right. ; \qquad S(3a) \left\{ \begin{array}{rrrl} -2ax & & +2az & = 0 \\ -x & -4ay & -z & = 0 \\ 2ax & & -2az & = 0 \end{array} \right.$$

Las soluciones del primer sistema son de la forma $x = -z$ y $y$ libre (dos parámetros). Las soluciones del segundo sistema cumplen $x = z$ y, por la segunda ecuación, $y = -\frac{2}{a}z$ (un parámetro).

(b) Por el apartado anterior,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{2}{a} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}$$

La inversa de $P$ es

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{2}{a} & -2 & -\frac{2}{a} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

Se considera la región triangular

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq \sqrt{\pi},\; x \leq y \leq 2x\}.$$

(a) (10 puntos) Represente el conjunto $T$ y calcule su área por el método que desee.

(b) (10 puntos) Calcular

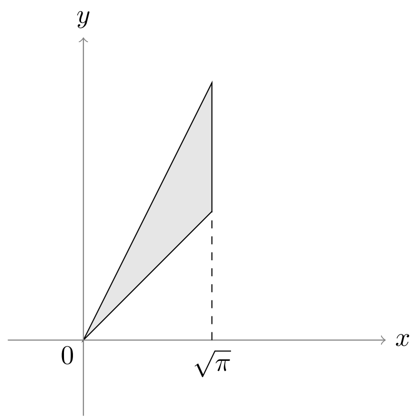
$$\iint_T \operatorname{sen}(x^2)\, dxdy,$$

donce $T$ es el conjunto del apartado (a). Pista: algunos valores trigonométricos comunes: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$; $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\cos \pi/2 = 1$, $\cos \pi = -1$.

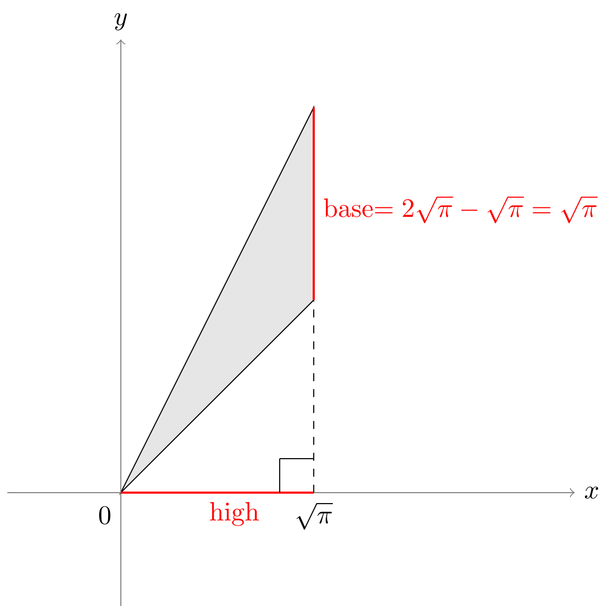
---

**Solución:**

(a) El conjunto $T$ se representa en esta figura.




El área de un triángulo es el producto de su base por su altura, dividido por dos. Luego el área de $T$ i2s $\frac{\pi}{2}$. Ver la figura siguiente.




El área de $T$ también se puede calcular como la integral doble siguiente

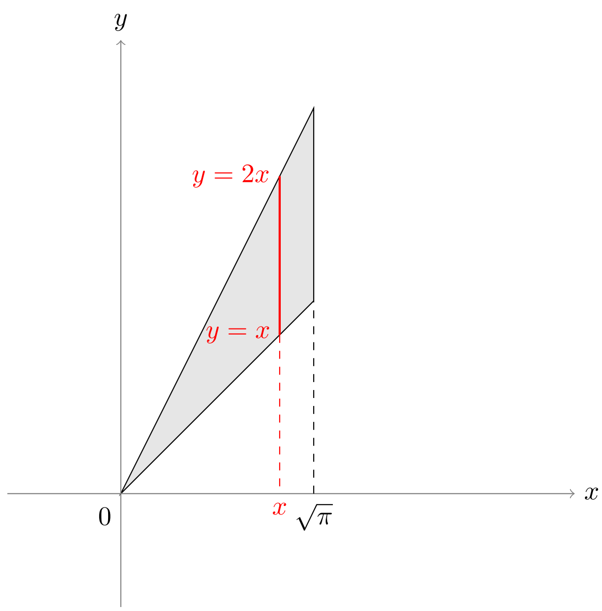
$$\iint_T 1\, dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left( \int_x^{2x} 1\, dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} (2x - x)\, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) La mejor opción es integrar primero con respecto a $y$ y luego con respecto a $x$, ver la figura de más abajo.

$$\iint_S \operatorname{sen}(x^2)\, dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(x^2) \int_x^{2x} dy\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} (2x - x) \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}(x^2)\, dx.$$

Dado que una primitiva de $x \operatorname{sen}(x^2)$ es $-\frac{1}{2}\cos(x^2)$, tenemos finalmente

$$\iint_S \operatorname{sen}(x^2)\, dxdy = -\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = 1.$$



$\boxed{4}$

(a) (10 puntos) Halle la integral indefinida

$$I = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx.$$

Pista: puede ser útil hacer el cambio de variable $t = e^x$.

(b) (10 puntos) Estudie la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx.$$

En el caso en que sea convergente, encuentre su valor.

---

**Solución:**

(a) El cambio $t = e^x$ transforma la integral en la integral racional

$$\int \frac{1+t}{1-t}\frac{1}{t}\,dt.$$

Descomponer en fracciones simples

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t}$$

es posible con $A = 1$ y $B = 2$. Luego

$$\int \frac{1+t}{1-t}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{2}{1-t}\,dt = \ln t - 2\ln(1-t) + C.$$

Volviendo a la variable original $x$

$$I = x - 2\ln(1-e^x) + C.$$

(b)

$$I = \lim_{a\to 1^+} \int_a^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx = \lim_{a\to 1^+} \left.\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_{x=a}^{x=3} = 3\sqrt[3]{2}.$$

$\boxed{5}$

(a) (10 puntos) Calcular el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiene por término general

$$x_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{2n}.$$

(b) (10 puntos) Se considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}.$$

Probar que es convergente y calcular su suma. Pista: Escriba unos pocos primeros términos de la serie y determibe si es alternada, geométrica, telescópica, .... Saber el o los tipos de la serie le ayudará a encontrar su suma.

---

**Solución:**

(a) $e^{-2}$.

(b) Los primeros términos de la serie son

$$(*) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \cdots.$$

La serie es geométrica, de razón negativa, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dado que la razón es menor que uno en valor absoluto, la serie es convergente. Además, la suma es igual al primer término dividido entre uno menos la razón.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-(-\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\left(=\sqrt{2}-1\right).$$

Nota: La serie también es alternada, con un término general que en valor absoluto es decreciente y converge a 0, ver (*), luego la serie es convergente por el Teorema de Leibniz. Sin embargo, encontrar la suma no es fácil sin utilizar el hecho de la series es. geométrica.