UC3M
Matemáticas para la Economía II (examen final extraordinario)
28 de junio de 2023

Niu: ______________ Grupo: ______

Nombre: ______________________________

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos	20	20	20	20	20	100
Nota						

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**.
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **NO DESGRAPE** el cuadernillo.
- Por favor, muestre una tarjeta de identificación válida si le es requerido por el profesor.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 5 ejercicios, para un total de 100 puntos.
- **Entregue únicamente este cuadernillo.** Puede utilizar también las dos caras esta hoja para escribir el examen.

$\boxed{1}$

Dado el parámetro $m \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (10 puntos) Estudie el rango de A, teniendo en cuneta los valores de m. Pista: Si necesita encontrar la raíces del determinante de A, puede utilizar la Regla de Ruffini, teniendo en cuenta que $m = 1$ es una raíz del determinante de A.

(b) (10 puntos) Dado que A es simétrica, es la matriz de una forma cuadrática Q. Clasifique la forma cuadrática según los valores del parámetro m.

$\boxed{2}$

Dado el parámetro a, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ -1 & -a & -1 \\ 2a & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) (10 puntos) Estudie si A es diagonalizable. Para los valores de a para los que la matriz A es diagonalizable, calcule los valores y los vectores propios.

(b) (10 puntos) IEn los casos en los que la matriz A es diagonalizable, encuentre una matriz diagonal D y una matriz P tales que $P^{-1}AP = D$. Encuentre P^{-1} de forma explícita.

$\boxed{3}$

Se considera la región triangular

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq \sqrt{\pi}, \; x \leq y \leq 2x\}.$$

(a) (10 puntos) Represente el conjunto T y calcule su área por el método que desee.

(b) (10 puntos) Calcular

$$\iint_T \operatorname{sen}(x^2) \, dxdy,$$

donce T es el conjunto del apartado (a). Pista: algunos valores trigonométricos comunes: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$; $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\cos \pi/2 = 1$, $\cos \pi = -1$.

$\boxed{4}$

(a) (10 puntos) Halle la integral indefinida

$$I = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}\, dx.$$

Pista: puede ser útil hacer el cambio de variable $t = e^x$.

(b) (10 puntos) Estudie la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx.$$

En el caso en que sea convergente, encuentre su valor.

$\boxed{5}$

(a) (10 puntos) Calcular el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiene por término general

$$x_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{2n}.$$

(b) (10 puntos) Se considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}.$$

Probar que es convergente y calcular su suma. Pista: Escriba unos pocos primeros términos de la serie y determibe si es alternada, geométrica, telescópica, ... Saber el o los tipos de la serie le ayudará a encontrar su suma.