$\boxed{1}$

(a) (10 puntos) Sabiendo que se cumple que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 4 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0,$$

hallar el valor o valores de x que resuelven la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 4 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & x+d \end{vmatrix} = -10.$$

(b) (10 puntos) Discutir y resolver el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcr} y+z & = & 1 \\ 2x-y-z & = & -1 \\ -4x+5y+5z & = & 5 \end{array} \right.$$

Solución:

(a) Aplicando las propiedades del determinante, tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 4 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 4 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{vmatrix}.$$

Dado que el segundo determinante a la derecha de la igualdad anterior es nulo por hipótesis, la ecuación por la que nos preguntan se simplifica a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = -10$$

y desarrollando el determinante por la cuarta columna, tenemos

$$x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

que se reduce a $5x = -10$, tras aplicar la regla de Sarrus, por ejemplo. Luego la solución es $x = -2$.

(b) Es fácil ver que el determinante del sistema es 0 y que tanto la matriz del sistema como la matriz ampliada tienen rango 2, luego hay infinitas soluciones, que dependen de un único parámetro. De hecho, podemos proceder directamente a resolver el sistema. De la primera ecuación tenemos $y = 1 - z$ y al sustituir en la segunda ecuación, $x = 0$. La tercera ecuación se cumple idénticamente cuando $x = 0$ y $y = 1 - z$. Por tanto, tomando $z = t$ como parámetro, las tres ecuaciones se satisfacen cuando $x = 0$, $y = 1 - t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$

Se considera la siguiente matriz que depende del parámetro $a \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & \dfrac{3}{a} & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) (10 puntos) ¿Para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz A? Justifique su respuesta.

(b) (10 puntos) Para los valores del parámetro a para los que la matriz A es diagonalizable, encuentre una matriz de paso P y una matriz diagonal D asociadas A. Justifique su respuesta.

Solución:

(a) Calculamos $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & a \\ 0 & \frac{3}{a} & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left((2-\lambda)(4-\lambda)-3\right) = (5-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5).$$

Por tanto, los valores propios son $\lambda = 5$ (doble) y $\lambda = 1$ (simple).

La matriz A será diagonalizable sii rango$(A - 5I_3) = 1$. Claramente,

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & a \\ 0 & \frac{3}{a} & -1 \end{pmatrix},$$

tiene rango 1, luego A es diagonalizable para todo $a \neq 0$.

(b)
- El subespacio propio asociado a $\lambda = 5$ está dado por las soluciones del sistema homogéneo $(A - 5I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & a \\ 0 & \frac{3}{a} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Este sistema se reduce a la ecuación $-3y + az = 0$. Tomando x, z como parámetros, las soluciones están dadas por

$$x(1,0,0) + z(0, \frac{a}{3}, 1).$$

- El subespacio propio asociado a $\lambda = 1$ está dado por las soluciones del sistema homogéneo $(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & \frac{3}{a} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Se trata de un sistema con dos ecuaciones independientes, $4x = 0$ y $y + az = 0$. Las soluciones son

$$z(0, -a, 1), \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, podemos elegir las matrices

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{3} & -a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

tales que $D = P^{-1}AP$.

$\boxed{3}$

(a) (10 puntos) Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2xy + 2xz + 4yz$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(b) (10 puntos) Encontrar el valor de la integral doble

$$\iint_D xe^{xy}\, dxdy,$$

donde $D = [0, 2] \times [0, 1]$.

Solución:

(a) La matriz de la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix},$$

que tiene menores principales $A_1 = 1 > 0$, $A_2 = 1 > 0$ y $A_3 = |A| = a - 2$. Luego, Q es indefinida si $a < 2$, semidefinida positiva si $a = 2$ y positiva definida si $a > 2$.

(b)

$$\iint_D xe^{xy}\, dxdy = \int_0^2 dx \int_0^1 xe^{xy}\, dy = \int_0^2 e^{xy}\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 e^x - 1\, dx = e^x - x\Big|_{x=0}^{x=2} = e^2 - 3.$$

$\boxed{4}$

(a) (10 puntos) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\pi\right) dx$$

y calcular su valor si es convergente.

(b) (10 puntos) Se considera la función $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por medio de la integral

$$F(t) = \int_0^t x\,(t - x)\; dx, \quad \text{for } t \geq 0.$$

Halle $F'(t)$.

Solución:

(a) Vamos a calcular la integral directamente. Sea $b > 2$.

$$\begin{aligned}
\int_2^b \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\pi\right) dx &= \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{1}{x}\pi\right)\Bigg|_2^b \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\cos\left(\frac{1}{b}\pi\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{1}{b}\pi\right),
\end{aligned}$$

dado que $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\pi\right) dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\pi\right) dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{1}{b}\pi\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi},
\end{aligned}$$

dado que $\cos 0 = 1$.

(b) $F(t)$ puede calcularse directamente y después se puede derivar para obtener $F'(t)$.

$$F(t) = \int_0^t tx\,dx - \int_0^t x^2\,dx = \frac{1}{2}tx^2\Big|_{x=0}^{x=t} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{6}t^3.$$

Luego, $F'(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Otra opción es calcular directamente $F'(t)$ mediante la regla de Leibniz:

$$F'(t) = \cancel{t(t-t)} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(x(t-x)\right)\,dx = \int_0^t x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^t = \frac{1}{2}t^2.$$

$\boxed{5}$

(a) (10 puntos) Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, que satisface $x_1 = 10$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{5}$, para $n \geq 1$. Probar que la sucesión es convergente y encontrar su límite. Pista: probar que la sucesión es monótona decreciente y que está acotada.

(b) (10 puntos) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{10}\right)^n}{n!}.$$

Solución:

(a) Notar que $x_1 = 10 > 5 + \frac{1}{5} = x_2$. Suponiendo que $x_{n-1} > x_n$, tenemos

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{5} > \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{5} = x_{n+1},$$

luego por el principio de inducción, la sucesión es monótona decreciente.

Por otra parte, $0 \leq x_1 \leq 10$. Suponiendo que $0 \leq x_n \leq 10$, tenemos

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5} \geq 0 \quad \text{and} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{5} \leq 5 + \frac{1}{5} \leq 10,$$

luego por el principio de inducción, la sucesión está acota entre 0 y 10.

Dado que la sucesión es monótona y acotada, es convergente a un límite L. Para hallar L resolvemos la ecuación

$$L = \frac{1}{2}L + \frac{1}{5} \Rightarrow L = \frac{2}{5}.$$

(b) Se trata de una serie cuyo término general, $a_n = \frac{\left(\frac{n}{10}\right)^n}{n!}$, es positivo. Utilizando el criterio del cociente y tras alguna simplificación, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}10^n n!}{n^n 10^{n+1}(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{10} \to \frac{e}{10} < 1 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Luego la serie es convergente