UC3M
Matemáticas para la Economía II (examen final)
1 de junio de 2022

Niu: ________________ Grupo: ______

Nombre: ______________________________

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos	20	20	20	20	20	100
Nota						

Instrucciones:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**.
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **NO DESGRAPE** el cuadernillo.
- Por favor, muestre una tarjeta de identificación válida si le es requerido por el profesor.
- Lea el examen cuidadosamente. El examen consta de 5 ejercicios, para un total de 100 puntos.
- **Entregue únicamente este cuadernillo.**

$\boxed{1}$

(a) (10 puntos) Sabiendo que se cumple que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 4 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0,$$

hallar el valor o valores de x que resuelven la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 4 & 2 & c \\ 1 & -1 & 1 & x+d \end{vmatrix} = -10.$$

(b) (10 puntos) Discutir y resolver el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcr} y+z & = & 1 \\ 2x-y-z & = & -1 \\ -4x+5y+5z & = & 5 \end{array} \right.$$

$\boxed{2}$

Se considera la siguiente matriz que depende del parámetro $a \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & \frac{3}{a} & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) (10 puntos) ¿Para qué valores del parámetro a es diagonalizable la matriz A? Justifique su respuesta.

(b) (10 puntos) Para los valores del parámetro a para los que la matriz A es diagonalizable, encuentre una matriz de paso P y una matriz diagonal D asociadas A. Justifique su respuesta.

$\boxed{3}$

(a) (10 puntos) Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2xy + 2xz + 4yz$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(b) (10 puntos) Encontrar el valor de la integral doble

$$\iint_D xe^{xy}\, dxdy,$$

donde $D = [0, 2] \times [0, 1]$.

$\boxed{4}$

(a) (10 puntos) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\pi\right) dx$$

y calcular su valor si es convergente.

(b) (10 puntos) Se considera la función $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por medio de la integral

$$F(t) = \int_0^t x\,(t - x)\, dx, \quad \text{for } t \geq 0.$$

Halle $F'(t)$.

$\boxed{5}$

(a) (10 puntos) Se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, que satisface $x_1 = 10$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{5}$, para $n \geq 1$.
Probar que la sucesión es convergente y encontrar su límite. Pista: probar que la sucesión es monótona decreciente y que está acotada.

(b) (10 puntos) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{10}\right)^n}{n!}.$$