

UC3M

Matemáticas para la Economía II (examen final)

29 de junio de 2022

Niu: _____ Grupo: _____

Nombre: _____

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Puntos	20	20	20	20	20	100
Nota						

1

(a) (10 puntos) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 1 & b \\ 3 & 4 & 0 & c \\ 1 & -1 & 0 & d \end{vmatrix} = 10,$$

encontrar de forma justificada el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2a+6 & 1 \\ 2 & -1 & 2b & 1 \\ 3 & 4 & 2c & 0 \\ 1 & -1 & 2d & 0 \end{vmatrix}.$$

(b) (10 puntos) Encontrar una de la matrices escalonadas equivalente a la matriz de orden 4×5 siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Utilizando dicha matriz escalonada, calcular el rango de A .

2

Se considera la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- (a) (10 puntos) Calcular los valores y vectores propios de A y probar que A es diagonalizable. Encontrar una de las formas diagonales D de A y la correspondiente matriz asociada P . Justificar las respuestas.
- (b) (10 puntos) Utilizando los resultados obtenidos en el apartado (a), calcular la n -ésima potencia de A , es decir, calcular

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^n,$$

donde n es un número entero positivo. Justificar la respuesta.

3

- (a) (10 puntos) Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = \frac{a}{3}x^2 + ay^2 + \frac{27}{a}z^2 + axy + 3yz$, donde $a \neq 0$ es un parámetro.
- (b) (10 puntos) Representar el subconjunto del plano $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, y \leq x, y \leq 2 - x\}$ y encontrar el valor de la integral doble siguiente:

$$\iint_D \sqrt{x+y} \, dx \, dy.$$

4

- (a) (10 puntos) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_3^4 \ln(x-3) dx$$

y encontrar su valor de forma razonada si resultara convergente.

Ayuda: Calcular $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \ln(x-3)$ mediante la Regla de L'Hopital.

- (b) (10 puntos) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_5^{\infty} \frac{1}{25+x^2} dx$$

y encontrar su valor de forma razonada si resultara convergente.

5

(a) (10 puntos) Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 7} - n}{\sqrt{n^2 + 13} - n}.$$

Justificar la respuesta.

(b) (10 puntos) Enunciar el Teorema de Leibniz sobre la convergencia de series alternadas.

Verificar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

cumple todas las hipótesis del Teorema de Leibniz. Si S denota la suma de la serie y S_{26} denota la suma parcial de los 26 primeros sumandos de la serie infinita,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{25}} - \frac{1}{\sqrt[3]{26}},$$

¿cuál es la cota del error $|S - S_{26}|$ que proporciona el Teorema de Leibniz?
