UC3M

Matemáticas para la Economía II (examen final, convocatoria ordinaria)
25 de mayo de 2021 **Soluciones**

$\boxed{1}$

Se considera el sistema lineal que consta de un parámetro a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+z+t &=& 5 \\ x+y+2z+2t &=& 6 \\ x+z+(a+2)t &=& 8 \end{array} \right.$$

(a) (10 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

(b) (10 puntos) Resolver el sistema cuando $a=2$. En este caso, encontrar además todas las soluciones (x,y,z,t) que satisfacen $x=1$.

Solución:

(a) Consideramos la matriz ampliada del sistema

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & a+2 & 8 \end{array} \right)$$

Mediante las operaciones fila2−fila1 y fila3−fila1 se obtiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 3 \end{array} \right)$$

Si $a \neq -1$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 <$ número de incógnitas y por el Teorem de Rouché–Fröbenius, el sistema es compatible intederminado.

Si $a=-1$, entonces $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ y por el Teorem de Rouché–Fröbenius, el sistema es incompatible.

(b) Cuando $a=2$, el sistema es compatible indeterminado y dado que hay 4 incógnitas y el rango de la matriz ampliada es 3, la familia de soluciones es uniparamétrica. Substituyendo $a=2$ en la forma reducida de la matriz aumentada, tenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

luego el sistema equivalente es

$$\left. \begin{array}{rcl} x+z+t &=& 5 \\ y+z+t &=& 1 \\ 3t &=& 3 \end{array} \right\}$$

Dado que $t=1$, el parámetro puede elegirse entre las variables x, y y z. Eligiendo por ejemplo z, el sistema es

$$\left. \begin{array}{rcl} x+t &=& 5-z \\ y+t &=& 1-z \\ 3t &=& 3 \end{array} \right\}$$

de manera que las soluciones son

$$\left. \begin{array}{rcl} x &=& 4-z \\ y &=& -z \\ t &=& 1 \end{array} \right\} \text{ o } (4-z,-z,z,1).$$

Finalmente, si $x=1$, entonces $z=3$ y $y=-3$, luego existe una sola solución que satisface la condición: $x=1$, $y=-3$, $z=3$ y $t=1$ o $(1,-3,3,1)$.

$\boxed{2}$

Se considera la siguiente matriz de parámetros α y β:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -\frac{1}{2} \\ \beta & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (10 puntos) ¿Para qué valores de los parámetros α y β es la matriz A diagonalizable? Justificar la respuesta.

(b) (10 puntos) Para los valores de los parámetros α y β para los que la matriz A es diagonalizable, hallar la matriz P y la matriz diagonal D asociadas a A. Justificar la respuesta.

Solución:

(a) Desarrollando el determinante $|A - \lambda I|$ por la primera fila, tenemos

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ \beta & -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left((1-\lambda)^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Los valores propios son por tanto $\lambda = \frac{1}{2}$ (doble) y $\lambda = \frac{3}{2}$ (simple).

La matriz A es diagonalizable sii $\text{rango}(A - \frac{1}{2}I) = 1$. Teniendo en cuenta que

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \beta & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

vemos que $\text{rango}(A - \frac{1}{2}I) = 1$ sii $\beta = -\alpha$. Luego A es diagonalizable sii esta condición se da.

(b) Suponemos que $\beta = -\alpha$, es decir, la matriz A es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\alpha & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda = \frac{1}{2}$ se hallan resolviendo $(A - \frac{1}{2}I)u = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\alpha & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema se reduce a la ecuación $\alpha x + \frac{1}{2}(y - z) = 0$. Dos representantes independientes de las soluciones son $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 2\alpha)$.

Los vectores propios asociados a $\lambda = \frac{3}{2}$ se hallan resolviendo $(A - \frac{3}{2}I)u = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\alpha & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema admite como solución el representante $(0, 1, -1)$.

Luego, bajo la premisa $\alpha + \beta = 0$, tenemos

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2\alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$

(a) (10 puntos) Clasificar la forma cuadrática $Q(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 8z^2 + 2xy - 4yz$.

(b) (10 puntos) Representar el conjunto plano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 \leq y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1\}$ y calcular la integral doble

$$\iint_D (x^2 - y)dxdy.$$

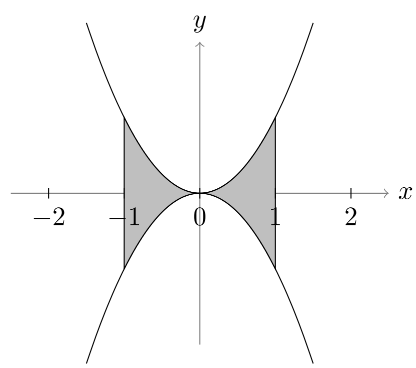
Solución:

(a) La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son -2, 1 y 0, luego se trata de una forma cuadrática semidefinida negativa.

(b) El conjunto D es la región sombreada de la gráfica que se muestra a continuación.



$$\iint_D (x^2 - y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y)dy = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{-x^2}^{x^2} dx = 2 \int_{-1}^{1} x^5 dx = \frac{4}{5}.$$

$\boxed{4}$

(a) (10 puntos) Encontrar el valor de la integral:

$$\int_0^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{\frac{2}{3}}}\,dx.$$

(b) (10 puntos) Determinar si la integral siguiente es convergente o divergente en función de los valores del parámetro $\gamma \geq 0$. En el caso en que sea convergente, hallar su valor.

$$\int_0^\infty xe^{-\gamma x}\,dx.$$

Solución:

(a) La integral es impropia de segunda especie, pues el integrando no está acotado en el punto $x = 2$ del intervalo de integración. Una primitiva del integrando en cualquier intervalo que no contenga al punto 2 se obtiene de forma inmediata: $3\sqrt[3]{x^2-4}$. Dividiendo el intervalo de integración $[0,6]$ en $[0,2]$ y $[2,6]$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{\frac{2}{3}}}\,dx &= \int_0^{2^-} \frac{2x}{(x^2-4)^{\frac{2}{3}}}\,dx + \int_{2^+}^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \lim_{b\to 2^-}\left[3\sqrt[3]{x^2-4}\right]_0^b + \lim_{a\to 2^+}\left[3\sqrt[3]{x^2-4}\right]_a^6 \\ &= 3\lim_{b\to 2^-}\left(\sqrt[3]{b^2-4} - \sqrt[3]{-4}\right) + 3\lim_{a\to 2^+}\left(\sqrt[3]{6^2-4} - \sqrt[3]{a^2-4}\right) = 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{32} = 9\sqrt[3]{4}.\end{aligned}$$

(b) La integral es impropia de primera especie. Si $\gamma = 0$ la integral es divergente. Si $\gamma > 0$, entonces tras integrar tomando partes $u = x$, $dv = e^{-\gamma x}$, $du = dx$, $v = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{x}{e^{\gamma x}}\,dx &= -\left[\frac{x}{\gamma}e^{-\gamma x}\right]_0^b + \frac{1}{\gamma}\int_0^b e^{-\gamma x}\,dx \\ &= -\frac{b}{\gamma}e^{-\gamma b} - \frac{1}{\gamma^2}\left[e^{-\gamma x}\right]_0^b \\ &= -\frac{b}{\gamma}e^{-\gamma b} - \frac{1}{\gamma^2}(e^{-\gamma b} - 1).\end{aligned}$$

Tomando $b \to \infty$ y dado que $be^{-\gamma b} \to 0$, $e^{-\gamma b} \to 0$, vemos que la integral es convergente y su valor es $\frac{1}{\gamma^2}$.

$\boxed{5}$

(a) (10 puntos) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} e^{(\sqrt{n^2+\pi n+2}-n)}$$

(b) (10 puntos) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} p^n, \quad \text{donde } p > 0.$$

Solución:

(a) Calculamos en primer lugar

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+\pi n+2}-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+\pi n+2-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+\pi n+2}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(\pi+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{\pi}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)} = \frac{\pi}{2},$$

donde hemos multiplicado numerador y denominador por el conjugado del numerador y después hemos utilizado que $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ tienden a 0 cuando $n \to \infty$. Por tanto, el límite buscado es $e^{\frac{\pi}{2}}$.

(b) Es una serie de términos positivos. Utilizando el criterio del cociente tenemos que, llamando $a_n = n^{-p}p^n$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{-p}p^{n+1}}{n^{-p}p^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p p \to p$$

cuando $n \to \infty$. Luego, la serie converge si $0 < p < 1$ y diverge si $p > 1$. En el caso $p = 1$, la serie es la serie armónica, luego también diverge.