May 6, 2019

MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II (2018-19)

ECONOMÍA, DERECHO–ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES–ECONOMÍA

HOJA 6. INTEGRALES DOBLES

(1) Calcular las siguientes integrales dobles:

$$a)\int_0^1\int_0^1 xydxdy \qquad b)\int_0^1 dx\int_0^1 (2x+y)dy \qquad c)\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy$$
$$d)\iint_{[0,1]\times[1,4]}\sqrt{xy}dxdy \qquad e)\int_0^1\int_0^1 (e^x+e^y)dxdy \qquad f)\int_0^1 dy\int_0^1 e^{x+y}dxdy$$

Respuestas: (a) $\int_0^1\int_0^1 xydxdy = 1/4$
(b) $\int_0^1 dx\int_0^1 (2x+y)dy = \frac{3}{2}$
(c) $\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy = 1/3$
(d) $\int_1^4 dy\int_0^1 \sqrt{xy}dx = \frac{28}{9}$
(e) $\int_0^1\int_0^1 (e^x+e^y)dxdy = 2(e-1)$
(f) $\int_0^1\int_0^1 e^{x+y}dxdy = (e-1)^2$

(2) Calcular las siguientes integrales dobles:

$$(a)\iint_A xdydx \qquad (b)\iint_B (x+y)dxdy \qquad (c)\iint_C xe^{-x^2/y}dxdy$$
$$(d)\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}dydx \qquad (e)\iint_E \frac{x^2}{y^2}dydx \qquad (f)\iint_F \frac{x^2}{y^2}dxdy$$

where

$A = \{(x,y) : x \geq 1, 2x^2-2 \leq y \leq x^2+x\}$,
B el cuadrilátero de vértices $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(6,2)$,
$C = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 2\}$,
$D = [3,4]\times[1,2]$,
$E = \{(x,y) : 1 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$,
$F = \{(x,y) : 1 \leq x \leq y, 1 \leq y \leq 2\}$.

Respuestas: (a) $\int_1^2\int_{2x^2-2}^{x^2+x} xdydx = \frac{19}{12}$
(b) $\int_1^2\int_y^{3y}(x+y)dxdy = 14$
(c) $\int_1^2\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/y}dxdy = (1-e^{-1})(1-\frac{1}{4})$
(d) $\int_3^4\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}dydx = \ln\frac{25}{24}$
(e) $\int_1^2\int_1^x \frac{x^2}{y^2}dydx = 2$
(f) $\int_1^2\int_1^y \frac{x^2}{y^2}dxdy = \frac{4}{3}$

(3) (a) Usando que $dxdy = \rho\, d\rho d\theta$ en coordenadas polares, calcular $\iint_A e^{-x^2-y^2}dxdy$, donce $A = \{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$.
(b) Calcular a partir de (a): $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$.
(c) Deducir de (b) el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.
(d) A partir de (a), usando que $\{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq a^2\} \subset [-a,a]^2 \subset \{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq 2a^2\}$, calcular aproximadamente $\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$.

(e) A partir de (d), y suponiendo que $0 < a < b$, calcular aproximadamente $\int_a^b e^{-x^2} dx$.

(f) A partir de (d), y suponiendo que $a < 0 < b$, calcular aproximadamente $\int_a^b e^{-x^2} dx$.

Respuestas: (a) $\int\int_A e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi(1-e^{-R^2})$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

(d) $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} < \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx < \sqrt{\pi(1-e^{-2a^2})}$

(e) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi(1-e^{-b^2})} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi(1-e^{-2a^2})} < \int_a^b e^{-x^2} dx < \frac{1}{2}\sqrt{\pi(1-e^{-2b^2})} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}$

(f) $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} + \sqrt{\pi(1-e^{-b^2})} < \int_a^b e^{-x^2} dx < \frac{1}{2}\sqrt{\pi(1-e^{-2a^2})} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi(1-e^{-2b^2})}$

(4) Calcular el área de la región limitada a la derecha por el círculo de radio 2 y a la izquierda por la recta $x = 1$.

Respuestas: $4\pi/3 - \sqrt{3}$.