May 6, 2019

MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II (2018-19)

ECONOMÍA, DERECHO–ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES–ECONOMÍA

HOJA 5. SUCESIONES Y SERIES

(1) Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones.

(a) $(-1)^n$ (b) $\frac{3^n+6\cdot 5^n}{5^n+e^n}$ (c) $\cos(0.7^n)$ (d) $\frac{n}{n+1}\cos(n\pi)$

(e) $n^{(-1)^n}$ (f) $\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$, $n \geq 2$ (g) $\frac{1+2+\cdots+n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (h) $\cos^n(0.7)$

(i) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ (j) $\sqrt[n]{n^2}$ (usar que $n^{1/n} \to 1$) (k) $\frac{\ln n^\alpha}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(l) x_n, donde $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$, para $n \geq 1$, con $x_1 = 0$.

(m) x_n, donde $x_{n+1} = \sqrt{14+\sqrt{x_n}}$, para $n \geq 1$, con $x_1 = 0$.

(n) Sabiendo que la sucesión $x_n = \sqrt[n]{c}$, donde $c \geq 1$, es convergente, ¿cuál es el límite?

(ñ) Calcular el límite de la sucesión $x_n = \sqrt[n]{c}$, cuando $0 < c < 1$.

Respuestas: Cuando la sucesión converge, se indica el límite. (a) No converge; (b) 6; (c) 1; (d) no converge; (e) no converge; (f) no converge; (g) 2 si $\alpha = 2$, 0 si $\alpha > 2$, no converge si $\alpha < 2$; (h) 0; (i) e^2; (j) 1; (k) 0; (l) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: (m) 4; (n) 1; (ñ) 1.

(2) Dadas las siguientes sucesiones de números decidir si son convergentes. ¿Son convergentes (o sumables) las series correspondientes?

(a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots.$

(b) $\frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{4}, \frac{12}{5}, \ldots.$

Respuestas: (a) La sucesión converge a 1, la serie es divergente, (b) La sucesión converge a 3, la serie es divergente.

(3) Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes series de términos positivos:

(a) $1 + 0.9 + 0.81 + 0.729 + 0.6561 + \ldots\ldots$

(b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots\ldots$

(c) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots\ldots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2+7}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+7}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$ (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\ln n}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(m) $\sum_{n=0}^{\infty} 3(\frac{3}{2})^n$ (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$ (ñ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+10}{10n+1}$

(o) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (p) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ (q) $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{\ln n}{n})^n$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

(u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$ (w) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}}-1)^n$

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

Respuestas: (a) Suma 10; (b) diverge; (c) converge; (d) diverge; (e) suma $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; (f) converge; (g) converge; (h) converge; (i) diverge; (j) converge; (k) converge; (l) diverge; (m) diverge; (n) diverge; (ñ) diverge; (o) diverge; (p) converge; (q) converge; (r) diverge; (s) converge; (t) converge; (u) diverge; (v) diverge; (w) converge; (x) converge.

(4) Demostrar las siguientes igualdades:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}]=1$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=3$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$

Respuestas: (a) Es una serie telescópica; (b) geométrica de razón 1/3 y primer término 2.

(5) Calcular la suma de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{5^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{3})^{n+1}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)(n+1)}$

Respuestas: (a) $\frac{7}{4}$; (b) $\frac{1}{16}$; (c) $\frac{3}{2}$.

(6) Estudiar la convergencia absoluta, condicional o divergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{2n^2+3}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+1}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

Respuestas: (a) Converge absolutamente; (b) diverge; (c) converge condicionalmente; (d) converge condicionalmente; (e) converge absolutamente; (f) diverge; (g) converge absolutamente; (h) converge absolutamente.

(7) Aproximar las siguientes sumas infinitas mediante la suma de los 6 primeros términos y estimar el error cometido:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{2n+1}$

Respuestas: (a) $S_6 = 0.6319$, $|S - S_6| < 0.0002$; (b) $S_6 = -0.7163$, $|S - S_6| < 0.2667$.

(8) Sea $\{a_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ una sucesión de números con $a_n > 0$, ¿Qué podemos decir sobre la convergencia de las siguientes series?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a_n}$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n(1+a_n)}$.

Respuestas: (a) Diverge; (b) converge; (c) converge.