May 6, 2019

MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II (2018-19)

ECONOMÍA, DERECHO–ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES–ECONOMÍA

HOJA 4. PRIMITIVAS Y INTEGRALES 2

(1) Calcular:

$$a)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad b)\int_0^3 \frac{1}{x^3}dx \quad c)\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$
$$d)\int_1^\infty e^{-x}dx \quad e)\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad f)\int_{-2}^4 \frac{dx}{x^2}$$

Respuestas: a) 2; b) ∞, c) 1; d) 1; e) π; f) ∞.

(2) Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.
Respuestas: π.

(3) Calcular $\displaystyle\int_1^\infty (1-x)e^{-x}\,dx$.
Respuestas: $-\frac{1}{e}$.

(4) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función con derivada continua f' definida en $\mathbb{R}$. Dado un intervalo $[a,b]$, se considera el cuerpo de revolución S obtenido al rotar la gráfica de f alrededor del eje X. El área de la superficie y el volumen de S se pueden calcular mediante las fórmulas

$$\text{área}(S) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad \text{volumen}(S) = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Calcular el área de la superficie y el volumen obtenido al rotar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ alrededor del eje X en el intervalo $[1,\infty)$.
Respuestas: El volumen es π, pero el área de la superficie es ∞.

(5) Sea

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{\operatorname{sen}\alpha t}{t}\,dt$$

(a) Probar que $I(0)=0$.
(b) Calcular $I'(\alpha)$.
(c) Utilizar los resultados previos para calcular $I(\alpha)$.
Respuestas: $I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}$, $I(\alpha)=\arctan\alpha$.

(6) Sea $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t}\,dt$, $\alpha>0$.
(a) Calcular $I'(\alpha)$.
(b) Calcular $I(\alpha)$.
(c) Calcular $J(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\,dt$, $\alpha,\beta>0$.
Respuestas: $I'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}$, $I(\alpha)=-\ln\alpha+C$, C constante, $J(\alpha,\beta)=I(\alpha)-I(\beta)=\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

(7) Sea $I(t)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\,dx$, $t>0$.
(a) Probar que $I(t)=\dfrac{1}{t}$.
(b) Probar que $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-tx}\,dt=\frac{n!}{t^{n+1}}$.
(c) Probar que $n!=\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dt$.
Respuestas:

(8) Sea $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, $\alpha>0$.

(a) Calcular $\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha)$.
(b) Calcular $I'(\alpha)$.
(c) Usar los resultados anteriores para hallar $I(\alpha)$.
(d) Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.
(e) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.

Respuestas: (a) 0; (b) $I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$; (c) $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha$; (d) $\frac{\pi}{2}$; (e) π.