

May 6, 2019

MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II (2018-19)
 ECONOMÍA, DERECHO-ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES-ECONOMÍA
HOJA 3. PRIMITIVAS Y INTEGRALES

(1) *Halla las siguientes integrales:*

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int \frac{x^2 + x + 1}{x\sqrt{x}} dx & \text{b)} \int xe^{-2x} dx & \text{c)} \int \sin^{14} x \cos x dx \\
 \text{d)} \int (x+1)(2-x)^{1/3} dx & \text{e)} \int \frac{x^4}{1+x^5} dx & \text{f)} \int e^{2x} \sin x dx \\
 \text{g)} \int \frac{1}{3+x^2} dx & \text{h)} \int x \cos x dx & \text{i)} \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2} dx \\
 \text{j)} \int x \operatorname{sen} ax^2 dx & \text{k)} \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx & \text{l)} \int \frac{1}{\frac{x^2}{2} - 2x + 4} dx \\
 \text{m)} \int \frac{40x}{(x-1)^{40}} dx & \text{n)} \int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+4x} dx & \text{o)} \int \frac{2x+1}{x^3+6x} dx \\
 \text{p)} \int \frac{x^4}{x^4-1} dx & \text{q)} \int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)^3} dx & \text{r)} \int \frac{2x-6}{(x-2)^2} dx
 \end{array}$$

Solution: a) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; Write $I = \int (x^2 + x + 1)x^{-3/2} dx = \int x^{1/2} + x^{-1/2} + x^{-3/2} dx$ and integrate term by term.

b) $-\frac{e^{-2x}(2x+1)}{4} + C$; By parts, $u = x$, $dv = e^{-2x} dx$, so that $du = dx$ and $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Then use $\int u dv = uv - \int v du$.

c) $\frac{\sin^{15} x}{15} + C$; Change of variable, $t = \sin x$, so that $dt = \cos x dx$. Hence $I = \int t^{14} dt$.

d) $-\frac{3(2-x)^{4/3}(4x+13)}{28} + C$; Change of variable, $t = 2 - x$, so that $dt = -dx$ and $x + 1 = t + 3$. Hence $I = -\int (t+3)t^{1/3} dt = -\int t^{4/3} + 3t^{1/3} dt$ and integrate term by term.

e) $\frac{\ln|1+x^5|}{5} + C$; Change of variable, $t = x^5$, so that $dt = 5x^4 dx$ and thus $I = \int \frac{1/5}{1+t} dt$ and integrate.

f) $\frac{e^{2x}}{5}(2 \sin x - \cos x) + C$; By parts, $u = e^{2x}$ and $dv = \sin x dx$, so that $du = 2e^{2x} dx$ and $v = -\cos x$. We find

$$I = -2e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx.$$

For the second integral take parts again ($u = e^{2x}$ and $dv = \sin x dx$, thus $du = 2e^{2x} dx$, $v = \sin x$) to find

$$\begin{aligned}
 I &= -2e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx = -2e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right) \\
 &= -2e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4I.
 \end{aligned}$$

Solving for I we get the result.

g) $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right) + C$; Divide both numerator and denominator by 3 to get $I = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2} dx$. Then recall that the antiderivative is an arctangent.

h) $\cos x + x \sin x + C$; By parts, $u = x$, $dv = \cos x dx$.

i) $-\frac{(1+\frac{1}{x})^4}{4} + C$; Change of variable $t = x^{-1}$, so $dt = -x^{-2} dx$. Thus $I = -\int (1+t)^3 dt = -(1+t)^4/4 + C$ and so on.

j) $-\frac{\cos ax^2}{2a} + C$; Change of variable, $t = ax^2$, thus $dt = 2ax dx$ and $I = \frac{2a}{f} \sin t dt$.

k) $-\frac{\sqrt{16-x^2}}{2} + C$; Change of variable $t = 16 - x^2$, $dt = -2x dx$. Thus $I = -2 \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.

l) $\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$; (Hard). Write the denominator $x^2 - 2x + 4 = \frac{1}{2}((x-2)^2 + 4) = 2\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1\right)$. Hence $I = \int \frac{1/2}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 1}$.

m) $\int \frac{40x}{(x-1)^{40}} dx = \int \frac{40(x-1)}{(x-1)^{40}} dx - \int \frac{40}{(x-1)^{40}} dx = -\frac{40}{38}(x-1)^{-38} - \frac{1}{39}(x-1)^{-39} + C$

n) $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+4x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \frac{1}{4} \ln x + \frac{3}{4} \ln(x-2) - \frac{5}{2}(x-2)^{-1} + C$

$$0) \int \frac{2x+1}{x^3+6x} dx = \int \left(\frac{2-\frac{x}{6}}{x^2+6} + \frac{1/6}{x} \right) dx = -\frac{1}{12} \int \frac{2x}{x^2+6} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+6} dx + \frac{1}{6} \ln x + C =$$

$$= -\frac{1}{12} \ln(x^2+6) + \frac{2\sqrt{6}}{6} \arctan \frac{x\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{6} \ln x + C$$

$$p) \int \frac{x^4}{x^4-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^4-1} \right) dx = x + \int \frac{1}{x^4-1} dx = x + \int \left(\frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1/2}{x^2+1} \right) dx = x + \frac{1}{4} \ln(x-1) -$$

$$\frac{1}{4} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$q) \int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)^3} dx = 2 \int (2x+3)(x^2+3x+7)^{-3} dx = 2(x^2+3x+7)^{-2} / (-2) + C$$

$$p) \int \frac{2x-6}{(x-2)^2} dx = \int \frac{2(x-2)-2}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx = 2 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$$

(2) Evaluar $F'(x)$ en los siguientes casos:

$$a) \int_1^x (t^2 - 2t + 5) dt \quad b) \int_x^0 t \cos t dt \quad c) x \left(\int_x^0 t \cos t dt \right)$$

Solution: a) $-x \cos x$; b) $\left(\int_x^0 t \cos t dt \right) - x^2 \cos x$; c) $x^2 - 2x + 5$.

(3) Se considera la función $F(x) = \int_{-3}^x \frac{t^2 - 4}{3t^2 + 1} dt$.

(a) Hallar los máximos locales de F . ¿Es alguno de estos puntos máximo global?

(b) Hallar los mínimos locales de F . ¿Es alguno de estos puntos máximo global?

Sea ahora $G(x) = \int_{-1}^x \frac{t^2 - 4}{3t^2 + 1} dt$. ¿Tiene G mínimo global?

Solution: $F'(x) = \frac{x^2-4}{3x^2+1}$, thus $x = \pm 2$ are the only critical points. Note that F' is positive for $x < -2$, negative for $-2 < x < 2$ and positive again for $x > 2$, thus -2 is a local maximum and 2 is a local minimum. By the way, it is a good exercise to compute F'' and then conclude that $x = 0$ is an inflection point.

(4) En cada caso, hallar el área de la región acotada por las gráficas de las funciones f y g .

$$a) f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$b) f(x) = (x-1)^3, \quad g(x) = x-1$$

$$c) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \quad g(x) = 1 - x^2$$

Solution: a) 9; b) 0.5; c) 4/15.

(5) Representar las funciones $y = 2e^{2x}$ y $y = 2e^{-2x}$ y encontrar el área de la región acotada por las gráficas de estas funciones y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Solution: $2(e - e^{-1})^2 \approx 11.0488$.

(6) Encontrar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x = 4$ y calcular el área de la región encerrada por la gráfica de f y la recta tangente, y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solution: $y = 1 + \frac{x}{4}$; $A = \frac{2}{3}$.

(7) Un activo bursátil X paga dividendos $D(t)dt$ en el instante de tiempo t . El valor actual de los dividendos acumulados en el intervalo $[0, T]$, $T > 0$, es

$$V(0) = \int_0^T e^{-rt} D(t) dt,$$

donde $r > 0$ es el tanto de interés continuo de un bono del Estado que no presenta riesgo en dicho periodo. Encontrar $V(0)$ (el precio del activo) en los casos siguientes,

(a) $D(t) = 1$.

(b) $D(t) = 2$ hasta $\frac{T}{2}$ y $D(t) = 0$ en $(\frac{T}{2}, T]$.

(c) $D(t) = e^{it}$, donde $i > 0$.

(d) $D(t) = \sin \frac{\pi t}{T}$.

Solution: a) $\frac{1}{r}(1 - e^{-rT})$; b) $\frac{2}{r}(1 - e^{-rT/2})$; c) $\frac{1}{r-i}(1 - e^{(i-r)T})$, if $i \neq r$ and T otherwise; d) $(1 + e^{-rT}) \frac{\frac{T}{\pi}}{1 + (\frac{rT}{\pi})^2}$.

- (8) Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, creciente en $(0, 1)$, decreciente en $(1, 2)$ y que satisfice: $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ y $f(2) = 4$. ¿Entre qué valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, puede garantizarse que $\alpha \leq \int_0^2 f(x) dx \leq \beta$? (Dar los valores más ajustados posibles)

Solution: Since, $3 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 5$, and $4 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 5$, we have that $7 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 10$.

- (9) Sea $f : [1, 3] \rightarrow [2, 4]$ una función creciente, continua y biyectiva, tal que $\int_1^3 f dx = 5$. Calcular $\int_2^4 f^{-1}(x) dx$

Solution: Since, $\int_1^3 f dx + \int_2^4 f^{-1}(x) dx = 10$. Hence, $\int_2^4 f^{-1}(x) dx = 10 - 5 = 5$.

- (10) Cierta compañía tiene costes marginales dados por $\frac{dC}{dx} = 4(1 + 12x)^{-1/3}$, donde x es la cantidad de cierto bien producido. Encontrar la función de costes, si se sabe que $C = 100$ cuando $x = 13$.

Solution: $\frac{1}{3}(1 + 12x)^{2/3}$.