January 23, 2019

MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II (2018-19)

ECONOMÍA, DERECHO–ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES–ECONOMÍA

HOJA 1. MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS

(1) *Calcular los siguientes determinantes:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

Solution: La solución del apartado a) es -15, la del apartado b) -36 y la del c) 32.

(2) *Si* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, *calcúlese razonadamente el valor de* $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$.

Solution:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

sacando el número 2 en cada una de las filas, obtenemos

$$2^3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix}$$

que, intercambiando las columnas 2 y 3 es

$$-2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

e intercambiando las filas 2 y 3,

$$2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2^3 \times 25 = 200$$

(3) *Comprueba las siguientes identidades sin desarrollar los determinantes:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Solution: a): En el determinante,

$$\left| \begin{pmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{pmatrix} \right|$$

multiplicamos y dividimos por a obtenemos

$$\frac{1}{a} a \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Haciendo lo mismo con b, obtenemos que este determinante es el mismo que

$$\frac{1}{ab}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

y ahora con c,

$$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

pero sacando abc en la primera columna, obtenemos que la última expresión es igual a

$$\frac{1}{abc}abc\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

b): Sumando la segunda columna a la tercera en el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

porque las columnas 1 y 3 son iguales.

(4) *Resolver la ecuación sin desarrollar el determinante, utilizando las propiedades de los determinantes:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

Solution: Debemos suponer que $a \neq 0$, porque si no el determinante es 0 para cualquier valor real x. Como,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix}$$

la ecuación del enunciado (suponiendo $a \neq 0$) es equivalente

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & c \\ 1 & b & x \end{vmatrix} = 0$$

Restamos la primera fila a la segunda y tercer filas y obtenemos la ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = (x-b)(x-c)$$

por lo que las soluciones son $x = b$ y $x = c$.

(5) *Calcula, simplificando previamente:* *a)* $\begin{vmatrix} ab & 2b^2 & -bc \\ a^2c & 3abc & 0 \\ 2ac & 5bc & 2c^2 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solution: a): En el determinante

$$\begin{vmatrix} ab & 2b^2 & -bc \\ a^2c & 3abc & 0 \\ 2ac & 5bc & 2c^2 \end{vmatrix}$$

sacamos fuera a de la primera columna, b de la segunda y c de la tercera, con lo que obtenemos

$$abc\begin{vmatrix} b & 2b & -b \\ ac & 3ac & 0 \\ 2c & 5c & 2c \end{vmatrix}$$

y ahora sacamos b de la primera fila, a de la segunda y c de la tercera,

$$a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ c & 3c & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Finalmente sacamos c en la segunda fila

$$a^2b^2c^3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3a^2b^2c^3$$

b): En el determinante

$$\left|\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{pmatrix}\right|$$

sacamos x en la primera fila y queda

$$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix}$$

Ahora restamos la primera fila, multiplicada por x, de todas las demás filas, con lo que queda

$$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & a-x & a-x \\ 0 & a-x & b-x & b-x \\ 0 & a-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna este determinante es igual a

$$x\begin{vmatrix} a-x & a-x & a-x \\ a-x & b-x & b-x \\ a-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$$

Ahora, restamos la primera fila de las demás,

$$x\left|\begin{pmatrix} a-x & a-x & a-x \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{pmatrix}\right|$$

y sacamos $a-x$, en la primera fila, fuera del determinante,

$$x(a-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix}$$

que desarrollando por la primera columna es

$$x(a-x)\begin{vmatrix} b-a & b-a \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = x(a-x)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = x(a-x)(b-a)(c-b)$$

donde hemos sacado $b-a$ en la primera fila y hemos calculado el determinante 2×2 restante.

c): En el determinante

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

restamos la última fila de las filas 2 y 3 y desarrollamos por la primera columna

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

sumando ahora la primera fila a la segunda y desarrollando por la primera columna, otra vez,

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+2) = -3$$

(6) *Sea A una matriz cuadrada tal que $A^tA = I$. Demuestra que $|A| = \pm 1$.*

Solution: Notemos que $1 = |I| = |A^tA| = |A^t||A| = |A|^2$. Por lo que $|A|^2 = 1$ y los únicos valores posibles son $|A| = 1$ o $|A| = -1$.

(7) *Hallar el rango de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution: El rango

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es el mismo que (restando a la segunda fila la primera multiplicada por 2 y a la tercera fila la primera multiplicada por 4)

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Por otra parte,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

(8) *Estudia, según los valores de x el rango de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 & 1 \\ 1 & x^2 & x^3 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution: Calculamos el rango de A. En primer lugar, nos fijamos en el menor

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -1$$

por lo que $\operatorname{rg} A \geq 3$, independientemente de lo que valga x. Desarrollando por la tercera fila vemos que el determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y desarrollando por la fila 3 obtenemos

$$|A| = -\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -(x^2-1)$$

por lo que el rango es 4 si $x^2 \neq 1$, es decir si $x \neq 1$ y $x \neq -1$. Resumiendo,

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3, & \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1; \\ 4, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Ahora calculamos el rango de B. Observemos que el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

no se anula, por lo que $\operatorname{rg} B \geq 2$. Por otra parte

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 2-x & 4-x^2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y este rango es 3, excepto si $5(2-x) = 4-x^2$. Esto se verifica si y sólo si $x^2 - 5x + 6 = 0$, es decir si

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 2, 3$$

Resumiendo,

$$\operatorname{rg} B = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 2 \text{ o } x = 3; \\ 3, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Finalmente, calculamos el rango de C.

$$\operatorname{rg} C = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & x & 1-2x \\ 0 & x & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & x & 1-2x \\ 0 & 0 & x^2-1 & 1+x-2x^2 \end{pmatrix}$$

y este rango es 3, excepto si $x^2 - 1 = 0$ y $1 + x - 2x^2 = 0$. ¿Hay algún valor de x que resuelva simultáneamente estas dos ecuaciones? Las soluciones de $x^2 - 1 = 0$ son $x = 1$ y $x = -1$. Mientras que las soluciones de $2x^2 - x - 1$ son

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1, -\frac{1}{2}$$

Vemos que $x = 1$ es la única solución simultánea de las dos ecuaciones. Por tanto,

$$\operatorname{rg} C = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 1; \\ 3, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(9) *Suponiendo que A y B son matrices regulares* ($\det \neq 0$)*, y que hay conformidad de órdenes para poder realizar las operaciones, despeja la matriz X en las expresiones siguientes:*
(a) $X^t \cdot A = B$
(b) $(X \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B$

Calcula la matriz X en las ecuaciones anteriores si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution: **a):** Tomando transpuestas en la ecuación $X^tA = B$, obtenemos que $B^t = (X^tA)^t = A^tX$ y, despejando X, queda que $X = (A^t)^{-1}B^t = (A^{-1})^tB^t$. En el caso particular en que

$$A = \left(\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right)\right) \qquad B = \left(\left(\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right)\right)$$

obtenemos que

$$X = (A^{-1})^tB^t = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -9 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b): Tomando inversas en la ecuación $(XA)^{-1} = A^{-1}B$ vemos que $XA = (A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}(A^{-1})^{-1} = B^{-1}A$. Y, como A es invertible, la podemos despejar $X = B^{-1}AA^{-1} = B^{-1}$. En el caso particular en que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

queda

$$X = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(10) *Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Solution: Utilizando la fórmula para calcular la inversa de A, obtenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ x & 1 & \frac{-x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nosotros vamos a calcularla utilizando transformaciones elementales por filas. Empezamos con

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y le añadimos a la segunda fila la primera multiplicada por x, con lo que obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ahora restamos de la primera fila la tercera multiplicada por x,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y a la segunda fila le restamos la tercera fila multiplicada por $\frac{x^2}{2}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

de donde se deduce la inversa de A. Calculamos ahora la inversa de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula se obtiene que

$$B^{-1} = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \begin{pmatrix} x^2+3 & 1 & -x \\ -12 & x-4 & 3 \\ 4x & 1 & -x \end{pmatrix}$$

También se puede hacer observando que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y le restamos a la tercera fila, la primera multiplicada por 4,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

intercambiamos las filas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & t & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

a la tercera fila le restamos la segunda multiplicada por t

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t^2-4t+3 & 4t & 1 & -t \end{array}\right)$$

De aquí vemos que el determinante de$A$ es $t^2 - 4t + 3$. Las raíces de este polinomio son

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 1, 3$$

por lo que la inversa existe si y sólo si $t \neq 1$ y $t \neq 3$. Suponiendo esto, podemos dividir la última fila por $t^2 - 4t + 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4-t & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4t}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & -\frac{t}{t^2-4t+3} \end{array}\right)$$

y ahora sumamos la tercera fila a la primera y le sumamos a la segunda la tercera fila multiplicada por $t-4$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{t^2+3}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & \frac{-t}{t^2-4t+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{t^2-4t+3} & \frac{t-4}{t^2-4t+3} & \frac{3}{t^2-4t+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4t}{t^2-4t+3} & \frac{1}{t^2-4t+3} & \frac{-t}{t^2-4t+3} \end{array}\right)$$

por lo que

$$A^{-1} = \frac{1}{t^2-4t+3}\begin{pmatrix} t^2+3 & 1 & -t \\ -12 & t-4 & 3 \\ 4t & 1 & -t \end{pmatrix}$$

(11) *Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:
Utilizaremos el método de Gauss para calcular la inversa. Empezamos con la matriz

$$(\,A|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dividiendo la primera fila entre 4 obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y ahora restamos la tercera fila a la segunda, con lo que obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por 3,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ahora sumamos la tercera fila a la primera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 & 3/4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a la tercera fila le sumamos la segunda multiplicada por $3/2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

multiplicamos la tercera fila por -2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

y la tercera fila la sumamos a la segunda y la restamos a la primera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

con lo que la inversa es

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 0 \\ -3/2 & -2 & 0 \\ -3/2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz B es $|B| = 0$, por lo que no tiene inversa.

Ahora calculamos la inversa de C, por el método de Gauss. Empezamos con la matriz

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En primer lugar, multiplicamos la fila 3 por -1 e intercambiamos las filas 1 y 3

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por 2

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

y sumamos a la segunda fila, la primera multiplicada por 2

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

intercambiamos las filas 2 y 3

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

multiplicamos la tercera fila por -1

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

sumamos la tercera fila a la primera

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

y ahora restamos la segunda fila a la primera

$$(C|\,I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

y obtenemos

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(12) *Dado el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{array} \right.$ *se pide calcular* m *para que el sistema*

(a) *no tenga soluciińn,*
(b) *tenga infinitas soluciones,*
(c) *tenga solución única*
(d) *tenga una soluciń para la que* $x = 3$.

Solution: La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array} \right)$$

cuyo rango es el mismo que

$$\operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ m & -1 & 1 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & m^2-1 & 1+m-2m^2 \end{array} \right)$$

Por tanto, el rango es 2 si $m^2 \neq 1$. Es decir, si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, entonces el sistema es compatible determinado. En este caso, el sistema original es equivalente a

$$\begin{array}{rcl} x - my & = & 2m - 1 \\ (m^2 - 1)y & = & 1 + m - 2m^2 \end{array}$$

y las solución es

$$\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{1+m-2m^2}{m^2-1} = \dfrac{-(m-1)(1+2m)}{(m-1)(m+1)} = \dfrac{-1-2m}{m+1} \\ x & = & 2m - 1 + my = 2m - 1 - m\dfrac{1+2m}{m+1} = \dfrac{-1}{m+1} \end{array}$$

Para que $x = 3$ debe verificarse que

$$3 = \frac{-1}{m+1}$$

es decir $m = -4/3$.

Estudiemos ahora que pasa si $m = 1$. En este caso,

$$\operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & m^2-1 & 1+m-2m^2 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = 1 = \operatorname{rg} A$$

y el sistema es compatible indeterminado. El sistema original es equivalente al sistema

$$x - y = 1$$

Y el conjunto de soluciones es $\{1 + y, y) : y \in R\}$. Tomando $y = 2$, obtenemos la solución $(3, 2)$.

En el caso en que $m = -1$,

$$\operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & m^2-1 & 1+m-2m^2 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right) = 2 \neq \operatorname{rg} A$$

y el sistema es incompatible.

(13) *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\left\{ \begin{array}{l} x + ay = 1 \\ ax + z = 1 \\ ay + z = 2 \end{array} \right.$ *se pide*

(a) *Expresarlo en forma matricial y escribir el vector de incógnitas, el del término independiente y el sistema homogéneo asociado.*

Solution: En forma matricial, el sistema queda expresado como $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) *Discutir y resolver según los valores de a.*
Solution: Consideramos la matriz ampliada

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \end{array}\right)$$

En primer lugar, intercambiamos las filas 2 y 3. Entonces,

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Restando la primera fila, multiplicada por a a la tercera fila obtenemos

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ & -a^2 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

Ahora sumamos a la tercera fila la segunda multiplicada por a,

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+a \end{array}\right)$$

De aquí deducimos que si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3 =$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.
En este caso, el sistema original es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ ay + z &= 2 \\ (1+a)z &= 2 \end{aligned}$$

y obtenemos la solución $z = 1$, $y = 1/a$, $x = 0$.
Si $a = -1$, entonces

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$ que es menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado. Ahora, el sistema original es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ -y + z &= 2 \end{aligned}$$

para obtener las soluciones tomamos z como un parámetro y despejamos $y = z - 2$, $x = 1 + y = z - 1$. Por tanto el conjunto de soluciones es

$$\{(z-1, z-2, z) \in R^3 : z \in R\}$$

Finalmente, Si $a = 0$, entonces

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y vemos que $\mathrm{rg}(A) = 2 < \mathrm{rg}(A|B) = 3$, por lo que el sistema es incompatible.

(14) *Discutir y resolver el sistema siguiente* $\left\{\begin{array}{r} x+y+z+2t-w=1 \\ -x-2y+2w=-2 \\ x+2z+4t=0 \end{array}\right.$

Solution: La matriz ampliada $(A|B)$ es

$$(A|B)=\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales con filas vemos que

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y vemos que $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A|B)=2$ menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado. Como hay cinco incógnitas obtendremos $5-2=3$ parámetros. El sistema que tenemos que resolver es equivalente al siguiente sistema,

$$\begin{array}{rcl} x+y+z+2t-w & = & 1 \\ -y+z+2t+w & = & -1 \end{array}$$

Elegimos los parámetros z, w, y t y despejamos $y=z+2t+w+1$, $x=1-y-z-2t-w=-2z-4t$. El conjunto de soluciones es

$$\{(-2z-4t, z+2t+w+1, z, t, w)\in\mathbb{R}^5 : z,t,w\in\mathbb{R}\}$$

(15) *Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:*

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ ax+y+z=b \\ 2x+2y+(a+1)\,z=0 \end{array}\right.$$

Solution: La matriz ampliada es

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & b \\ 2 & 2 & a+1 & 0 \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$\operatorname{rg}(A|B)=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & b \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Si $a\neq 1$, entonces el sistema es compatible determinado y es equivalente al sistema

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ y+z & = & b \\ (a+1)z & = & 0 \end{array}$$

La solución es

$$z=0,\quad y=\frac{b}{1-a},\quad x=\frac{-b}{1-a}$$

Ahora estudiamos el sistema para el valor $a = 1$. Entonces,

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y vemos que, si $b \neq 0$, entonces el sistema es incompatible, porque, es ese caso $\mathrm{rg}(A) = 1$, $\mathrm{rg}(A|B) = 2$.

Por último, si $a = 1$ y $b = 0$, entonces $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 1$ y el sistema es compatible indeterminado con $3 - 1 = 2$ parámetros. En este caso, el sistema original es equivalente al sistema siguiente

$$x + y + z = 0$$

utilizando y, z como parámetros, el conjunto de soluciones es

$$\{(-y-z, y, z) : y, z \in R\} =< (-1, 0, 1), (-1, 1, 0) >$$

Resumiendo,

$$\begin{cases} a \neq 1, & \text{S.C.D. cuya solución es } z = 0, \quad y = \frac{b}{1-a}, \quad x = \frac{-b}{1-a}; \\ a = 1, & \text{Si} \begin{cases} b \neq 0, & \text{S.I.}; \\ b = 0, & \text{S.C.I. cuyas soluciones son } < (-1,0,1), (-1,1,0) >. \end{cases} \end{cases}.$$

(16) *Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:*

$$\begin{cases} x - 2y + bz = 3 \\ 5x + 2y = 1 \\ ax + z = 2 \end{cases}$$

Solution: La matriz ampliada es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 2a & 1-ab & 2-3a \end{array}\right)$$

Restando a la tercer fila la segunda multiplicada por $a/6$ queda

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 1-\frac{ab}{6} & 2-\frac{2a}{3} \end{array}\right)$$

De aquí vemos que si $ab \neq 6$, entonces el sistema es compatible determinado y la (única) solución es

$$z = \frac{12-4a}{6-ab}, \quad y = \frac{-7}{6} + \frac{5}{12}\frac{12-4a}{6-ab}b, \quad x = 3 + \frac{12-4a}{6-ab}b - \frac{7}{3} + \frac{5}{6}\frac{12-4a}{6-ab}b$$

En el caso en que $ab = 6$, despejamos $a = 6/b$ (ya que $b \neq 0$) y obtenemos

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 12 & -5b & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2b-4}{b} \end{array}\right)$$

por lo que si $b = 2$ (y por tanto $a = 3$, entonces $\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}(A) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 3 \\ 12y - 10z &= -14 \end{aligned}$$

Tomando a z como parámetro, las soluciones son

$$\{(\frac{2-z}{3}, \frac{5z-7}{6}, z) : z \in R\}$$

Finalmente, si $b \neq 2$, entonces el sistema es incompatible.

(17) *Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,*

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Solution: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

Por tanto, las soluciones son

$$x = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{16}{4} = 4 \quad y = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2 \quad z = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{20}{4} = 5$$

(18) *Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,*

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Solution: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

por lo que la solución es

$$x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{10}{2} = 5 \quad y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{14}{2} = 7 \quad z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{2}{2} = 1$$

(19) *Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,*

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

Solution: El determinante de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

y la solución es

$$x = \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{-36}{-6} = 6 \quad y = \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{12}{-6} = -2 \quad z = \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{-6} = \frac{-5}{2}$$

(20) *Dado el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas siguiente,*

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ax + (a+3)y + 3z = 1 \end{cases}$$

(a) *Estudiar si para algún valor de a el sistema es incompatible.*
(b) *Para cada valor del parámetro a, para el que el sistema sea compatible, escribir la expresión general de todas sus soluciones.*

Solution: El rango de la matriz asociada es

$$\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ a & a+3 & 3 & 1 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3-a & 3-a & 1-3a \end{array}\right)$$

Vemos que si $a = 3$ el sistema es incompatible porque $\mathrm{rg}(A|B) = 2$, $\mathrm{rg}(A) = 1$. En el caso en que $a \neq 3$ el sistema es compatible indeterminado y equivalente al sistema

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z &=& 3 \\ (3-a)y + (3-a)z &=& 1-3a \end{array}$$

y tomando z como parámetro, obtenemos las soluciones

$$\{(\frac{7+3a}{3-a} + z, \frac{1-3a}{3-a} - z, z) : z \in R\}$$

(21) *Dado el sistema homogéneo*

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

(a) *Calcular m para que tenga algunas solución distinta a la trivial.*
(b) *resolverlo para el valor calculado en el apartado anterior.*

Solution: El rango de la matriz asociada al sistema es

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

intercambiamos las dos primeras filas

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 6 & 3m-4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

intercambiamos las dos últimas filas

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 3m-4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3m-46 \end{pmatrix}$$

para que tenga solución distinta de la trivial, el determinante ha de valer cero. Esto ocurre cuando $m = 46/3$. Para este valor de m, el sistema original es equivalente a

$$\begin{aligned} -x + y + \frac{43}{3}z &= 0 \\ y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos las soluciones

$$\{(22z/3, -7z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$