MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA II. ECONOMÍA
Examen extraordinario, junio 2020

Problema 1

(a) (4 puntos) Calcula el rango de la matriz A en función de los valores de x

$$A = \begin{pmatrix} 2x & x & 3x \\ 6x & 1+x & 0 \\ -2x & x-1 & 4x-4 \end{pmatrix}.$$

(b) (6 puntos) Halla los valores y los vectores propios de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indica si la matriz B es diagonalizable. (Pista: utiliza que -1 es uno de los valores propios y aplica la regla de Ruffini para encontrar el resto de valores propios).

Problema 2

(a) (4 puntos) Resuelve la integral

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx.$$

(b) (6 puntos) Calcula el volumen del sólido que define la función $z = xe^{x^2-y}$ bajo su gráfica, con base en el recinto

$$A = \{(x,y)\,:\,0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2x^2\}.$$

Problema 3

Considera la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_{-2t}^{2t} e^{-x^2}\,dx.$$

(a) (2 puntos) Demuestra que F es una función impar, es decir, se verifica $F(-t) = -F(t)$ para todo t.

(b) (2 puntos) Calcula $F(0)$.

(c) (2 puntos) Calcula los límites

$$\lim_{t\to\infty} F(t), \qquad \lim_{t\to-\infty} F(t).$$

(Pista: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.)

(d) (4 puntos) Estudia la monotonía y la curvatura de F, es decir, la concavidad/convexidad de F.

Problema 4

(a) (3 puntos) Probar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de término general

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{3n-1}$$

no tiene límite.

(b) (3 puntos) Considera la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Estudia si la serie es convergente.

(c) (4 puntos) Estudia si la serie definida en el apartado (b) converge absolutamente o condicionalmente. (Pista: utiliza el criterio de la integral).

Soluciones

Problema 1

(a) El determinante de A es

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 3x \\ 6x & 1+x & 0 \\ -2x & x-1 & 4x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & x & 3x \\ 0 & 1-2x & -9x \\ 0 & 2x-1 & 7x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & x & 3x \\ 0 & 1-2x & -9x \\ 0 & 0 & -2x-4 \end{vmatrix} = -4x(1-2x)(x+2).$$

(Operaciones: en la primera igualdad, $\text{fila}_3+\text{fila}_1$, $\text{fila}_2\text{-}3\times\text{fila}_1$; en la segunda, $\text{fila}_3+\text{fila}_2$).

Luego la matriz tiene rango 3 si $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ y $x \neq -2$. Veamos que la matriz tiene rango 2 para $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ o $x = -2$.

En el caso $x = 0$, la matriz escalonada de A es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

que es de rango 2.

En el caso $x = \frac{1}{2}$, la matriz escalonada de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-9}{2} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-9}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que también es de rango 2.

En el caso $x = -2$, la matriz escalonada de A es

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que también es de rango 2.

(b) El polinomio característico de B es $p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) - 2$. Expandiéndolo, tenemos

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4.$$

Como sabemos que -1 es un valor propio, dividimos el polinomio por el factor $\lambda + 1$. Usando por ejemplo la regla de Ruffini, encontramos que el polinomio factoriza en el producto $-(1+\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = -(1+\lambda)(\lambda-2)^2$. Luego las raíces son $\lambda = -1$ (simple) y $\lambda = 2$ (doble), que son también los valores propios de la matriz.

Para hallar los vectores propios resolvemos los sistemas $(B+I)u = 0$ y $(B-2I)u = 0$. El primero es

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo encontramos $x = y = z$, por lo que $(1,1,1)$ es vector propio asociado a $\lambda = -1$. El segundo sistema se reduce a la ecuación

$$x + y + z = 0,$$

por lo que $(-1,1,0)$ y $(0,-1,1)$ son vectores propios asociados a $\lambda = 2$.

La matriz B es diagonalizable ya que admite tres vectores propios independientes. También podría haberse contestado esta cuestión directamente observando que la matriz es simétrica.

Problema 2

(a) Es inmediata, $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx = \ln(1+\sin x) + C$.

(b)

$$\begin{aligned} V &= \iint_A xe^{x^2-y}\, dxdy = \int_0^1 x\, dx \int_{x^2}^{2x^2} e^{x^2-y}\, dy = \int_0^1 -xe^{x^2-y}\Big|_{x^2}^{2x^2} dx \\ &= \int_0^1 -x(e^{-x^2}-1)\, dx = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 xe^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

Problema 3

(a) $F(-t) = \int_{2t}^{-2t} e^{-x^2}\, dx = -\int_{-2t}^{2t} e^{-x^2}\, dx = -F(t)$ y por tanto F es una función impar, donde hemos utilizado la propiedad de que la integral cambia de signo al cambiar el orden del intervalo de integración.

(b) $F(0) = \int_0^0 e^{-x^2}\, dx = 0$, ya que la integral es cero si el intervalo de integración es degenerado. También puede verse como consecuencia de ser F impar.

(c) Dado que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, tenemos que $\lim_{t\to\infty} F(t) = \sqrt{\pi}$ y

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \int_{\infty}^{-\infty} e^{-x^2}\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = -\sqrt{\pi}.$$

(d) Aplicando el Teorema de Leibniz, la primera derivada de F es

$$F'(t) = 2e^{-4t^2} - (-2)e^{-4t^2} = 4e^{-4t^2} > 0, \quad \text{para todo } t.$$

Luego F es estrictamente creciente. La derivada segunda es

$$F''(t) = -32te^{-4t^2},$$

que es positiva si $t < 0$ y negativa si $t > 0$. Luego F es estrictamente convexa en $(-\infty, 0]$ y estrictamente cóncava en $[0, \infty)$.

Problema 4

(a) La subsucesión de términos pares, $n = 2k$, es

$$\frac{(-1)^{2k} \cdot 2k}{3(2k)-1} = \frac{2k}{6k-1}.$$

Esta subsucesión converge a $\frac{1}{3}$.

La subsucesión de términos impares, $n = 2k+1$, es

$$\frac{(-1)^{2k+1} \cdot (2k+1)}{3(2k+1)-1} = \frac{-(2k+1)}{6k+2}.$$

Esta subsucesión converge a $\frac{-1}{3}$.

Dado que la sucesión admite dos subsucesiones que convergen a límites distintos, la sucesión no tiene límite.

(b) Se trata de una serie alternada que verifica

- $a_n > a_{n+1}$, $n =, 1, 2, \ldots$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

con $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. Por el criterio de Leibniz, la serie converge.

(c) Aplicamos el criterio de la integral a la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. La integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\, dx = 2\sqrt{\ln x}\Big|_2^{\infty}$$

diverge. Por tanto, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ es divergente.

Concluimos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{\ln n}}$ converge condicionalmente.