

May 4, 2012

CAPÍTULO 5: OPTIMIZACIÓN

1. OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

En toda esta sección D denota un **subconjunto abierto** de $\mathbb{R}^n$.

1.1. Condiciones Necesarias de Primer Orden.

Proposición 1.1. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Si $p \in D$ es un máximo o un mínimo local de f en D , entonces

$$\nabla f(p) = 0$$

Demostración Fijemos $i = 1, \dots, n$ y consideremos la curva

$$g(t) = f(p + te_i)$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Observamos que g es una función diferenciable de 1-variable que tiene un máximo local en $t_0 = 0$. Así,

$$g'(0) = 0$$

Pero,

$$g'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + te_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Definición 1.2. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que $p \in D$ es un **punto crítico** si f no es diferenciable en p o si

$$\nabla f(p) = 0$$

Observación 1.3. Si p es un extremo local de f , entonces p es un punto crítico de f .

Definición 1.4. Si $\nabla f(p) = 0$, pero p no es un extremo local de f , entonces p es un **punto de silla**.

1.2. Condiciones Necesarias de Segundo Orden.

Proposición 1.5. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(D)$. Dado un punto $p \in D$.

- (1) Si p es un máximo local de f en D , entonces la matriz Hessiana de $Hf(p)$ es semidefinida negativa o definida negativa.
- (2) Si p es un mínimo local de f en D , entonces la matriz Hessiana de $Hf(p)$ es semidefinida positiva o definida positiva.

1.3. Condiciones Suficientes de Segundo Orden.

Proposición 1.6. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(D)$. Sea $p \in D$ y supongamos que

$$\nabla f(p) = 0.$$

- (1) Si $Hf(p)$ es definida negativa, entonces p es un máximo local (estricto) de f .
- (2) Si $Hf(p)$ es definida positiva, entonces p es un mínimo local (estricto) de f .
- (3) Si $Hf(p)$ es indefinida, entonces p es un punto de silla.

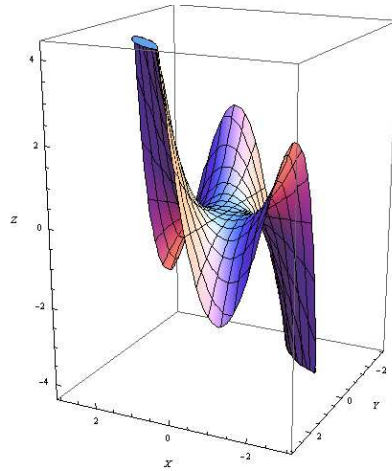
Ejemplo 1.7. Consideremos la función,

$$f(x, y) = x^2y + y^2x$$

Entonces, $\nabla f(x, y) = (2xy + y^2, 2xy + x^2)$ y el único punto crítico es $(0, 0)$. Para determinar si es un máximo, mínimo o punto de silla calculamos la matriz Hessiana,

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las derivadas de segundo orden no aportan ninguna información. Pero dado que $f(x, x) = 2x^3$, entonces $(0, 0)$ es un punto de silla. La gráfica de f es la siguiente



Ejemplo 1.8. Consideremos la función,

$$f(x, y) = (x - 1)^4 + (y - 1)^2$$

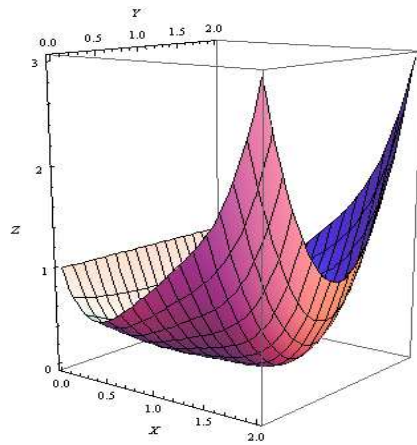
Entonces,

$$\nabla f(x, y) = (4(x - 1)^3, 2(y - 1))$$

y el único punto crítico es $(1, 1)$. Para determinar si es un máximo, mínimo o punto de silla calculamos la matriz Hessiana,

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $Hf(1, 1)$ es semidefinido positivo las condiciones de segundo orden no aportan ninguna información. Pero dado que $f(x, y) \geq 0 = f(1, 1)$, entonces $(1, 1)$ es un mínimo global. La gráfica de f es la siguiente



Ejemplo 1.9. Consideremos la función,

$$f(x, y) = (x - 1)^3 + y^2$$

El gradiente es

$$\nabla f(x, y) = (3(x - 1)^2, 2y)$$

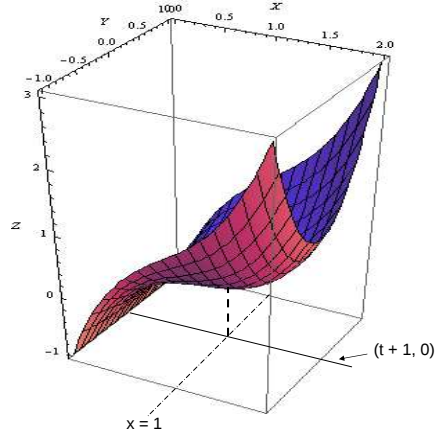
y existe un único punto crítico en $(1, 0)$. Para clasificarlo, calculamos la matriz Hessiana

$$Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 6(x - 1), & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Big|_{x=1, y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

como es semidefinida positiva las condiciones de segundo orden no aportan ninguna información. Pero dado que,

$$f(1 + t, 0) = t^3 = \begin{cases} > 0 & \text{si } t > 0 \\ < 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

vemos que $(1, 0)$ es un punto de silla. La gráfica de f es la siguiente



Ejemplo 1.10. Consideremos la función,

$$f(x, y) = x^2 + y^2(x + 1)^3$$

El gradiente es

$$\nabla f(x, y) = (2x + 3y^2(x + 1)^2, 2y(x + 1)^3)$$

y existe un único punto crítico en $(0, 0)$. Para clasificarlo, calculamos la matriz Hessiana,

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 + 6y^2(x + 1) & 6y(x + 1)^2 \\ 6y(x + 1)^2 & 2(x + 1)^3 \end{pmatrix} \Big|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva. Así, $(0, 0)$ es un mínimo local (estricto). Pero no es mínimo global, porque $f(-2, y) = 4 - y^2$ puede hacerse arbitrariamente pequeño al tomar valores grandes de y .

Observación 1.11 (Una justificación intuitiva de las condiciones de segundo orden). Recordemos que el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto p es

$$P_2(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}(x - p) Hf(p)(x - p)$$

Recordemos también que si f es de clase C^2 entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{\|x - p\|^2} = 0$$

donde

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

es el error cometido al aproximar la función f por el polinomio de Taylor de orden 2. Supongamos ahora que p es un punto crítico de f y, por tanto $\nabla f(p) = 0$. Entonces

$$f(x) - f(p) = \frac{1}{2}(x - p) Hf(p)(x - p) + R_2(x)$$

y para x cercano a p el término $R_2(x)$ es ‘pequeño’. Por tanto si, por ejemplo, sabemos que el término

$$(x - p) Hf(p)(x - p) > 0$$

entonces $f(x) - f(p) > 0$ para todo $x \neq p$ ‘suficientemente cercano’ a p y el punto p debería ser un mínimo local. Pero la condición $(x - p) \mathcal{H} f(p)(x - p) > 0$ para todo $x \neq p$ se verifica si $\mathcal{H}$ es definido positivo.

2. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD: MÉTODO DE LAGRANGE

En esta sección consideramos problemas del siguiente tipo

$$(2.1) \quad \begin{array}{ll} \max & (\text{resp. min}) \quad f(x) \\ \text{s.a.} & g_1(x) = 0 \\ & g_2(x) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = 0 \end{array}$$

Definición 2.1. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es una solución del problema 2.1 si

(1) Satisface todas las restricciones,

$$g_1(p) = g_2(p) = \cdots = g_m(p) = 0$$

y
(2) $f(p) \geq f(x)$ (resp. $f(p) \leq f(x)$) para cualquier otro punto $x \in \mathbb{R}^n$ que también satisfaga las restricciones $g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0$.

Observación 2.2 (Condición de regularidad). Para poder aplicar los métodos que vamos a estudiar a continuación es necesario comprobar primero que se verifica la siguiente condición de regularidad. Sea

$$(2.2) \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}$$

el conjunto factible del problema (P). Definimos la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$$

La condición de regularidad es la siguiente:

$$(2.3) \quad \text{rg}(Dg(p)) = m, \quad \text{para todo punto } p \in M.$$

Intuitivamente, la condición de regularidad significa que el conjunto M es una ‘superficie’ en $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - m$ y que en cada punto $p \in M$ es posible calcular el plano tangente $T_p M$ a la superficie M como el subconjunto

$$(2.4) \quad p + \{v \in \mathbb{R}^n : Dg(p)v = 0\} = \{p + v : v \in \mathbb{R}^n, \quad Dg(p)v = 0\}$$

2.1. Condiciones de Primer Orden.

Proposición 2.3 (Método de Lagrange). Supongamos que las funciones $f, g_1, \dots, g_m$ son de clase C^1 y que se verifica la condición de regularidad 2.3. Si p es una solución del problema 2.1, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla L(p) = 0$$

donde

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$$

es la **función de Lagrange** asociada al problema 2.1.

Las ecuaciones,

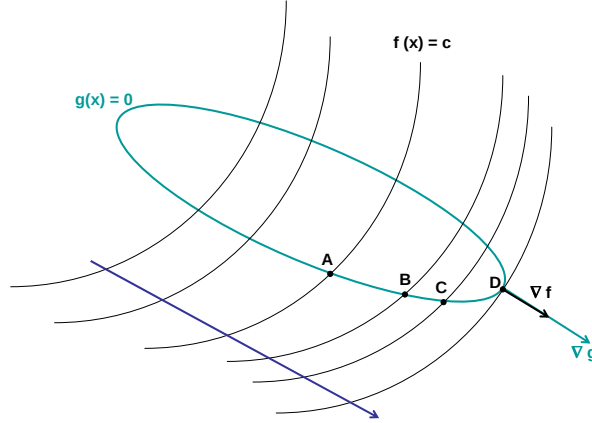
$$\begin{aligned}\nabla L(x) &= 0 \\ g_1(x) &= 0 \\ \vdots \\ g_m(x) &= 0\end{aligned}$$

son las **Ecuaciones de Lagrange**. Existen $n + m$ ecuaciones y $n + m$ incógnitas (las n coordenadas de p y los multiplicadores de Lagrange, $\lambda_1 \dots, \lambda_m$)

Observación 2.4 (¿Por qué las ecuaciones de Lagrange deberían ser ciertas?). Para simplificar, supongamos que sólo hay una restricción y el problema es

$$\begin{aligned}\max \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g(x) = 0\end{aligned}$$

En el dibujo siguiente hemos representado el conjunto $\{x : g(x) = 0\}$ y las superficies (o curvas) de nivel $f(x) = c$. La flecha indica la dirección de crecimiento de f (que en cada punto está dada por el gradiente de f).



Vemos que, por ejemplo, el punto A no puede ser un máximo de f en el conjunto $\{x : g(x) = 0\}$, ya que f alcanza un valor mayor en el punto B , es decir $f(B) > f(A)$. Asimismo, vemos gráficamente que $f(C) > f(B)$. El punto D es exactamente el punto en el que si nos movemos en la dirección de $\nabla f(D)$ ya no se verifica la restricción $g(x) = 0$. En D , las curvas de nivel $f(x) = c$ y $g(x) = 0$ son tangentes o, equivalentemente, $\nabla f(D)$ y $\nabla g(D)$ son paralelos, lo cual significa que uno es un múltiplo del otro $\nabla f(D) = \lambda \nabla g(D)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.5 (Maximización de Utilidad con Restricciones Presupuestarias). Consideremos el problema

$$\left. \begin{aligned}\max \quad & u(x) \\ \text{s.a.} \quad & p \cdot x = t\end{aligned} \right\}$$

El punto $x \in \mathbb{R}_+^n$ se interpreta como la cesta de consumo y $p \in \mathbb{R}_{++}^n$ como los precios de los bienes. El agente tiene una renta t y escoge una cesta de consumo x

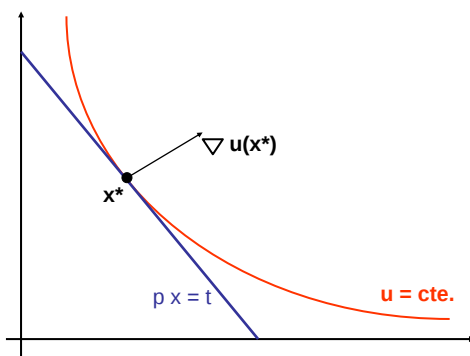
tal que maximiza su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria , $p \cdot x = t$. La función de Lagrange es

$$L = u(x) + \lambda(t - px)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$(2.5) \quad \left. \begin{array}{l} \nabla u = \lambda p \\ px = t \end{array} \right\}$$

Por lo que si x^* es una solución del problema, entonces $\nabla u(x^*)$ es perpendicular al plano $p \cdot x = t$.



Por otra parte, vemos que las ecuaciones 2.5 son equivalente a las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} \text{RMS}_{ij}(x) & = & \frac{p_i}{p_j} \\ px & = & t \end{array}$$

donde

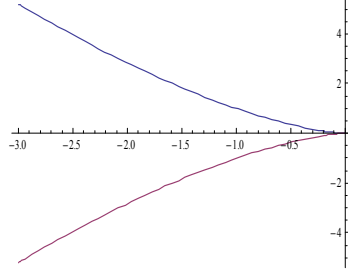
$$\text{RMS}_{ij} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}$$

es la relación marginal entre el bien i y el bien j .

Ejemplo 2.6 (La condición de regularidad). Este es un ejemplo que ilustra que si la condición de regularidad 2.3 no se verifica, las ecuaciones de Lagrange pueden no determinar el óptimo. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rcl} \max & = & x \\ \text{s.a.} & & x^3 + y^2 = 0 \end{array}$$

El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^2 = 0\}$ está representado en la siguiente figura



Claramente, la solución es $x = 0$. Pero si escribimos el Lagrangiano

$$L = x + \lambda(x^3 + y^2)$$

las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 1 - 3\lambda x^2 &= 0 \\ -2\lambda y &= 0 \\ x^3 + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

La primera ecuación implica que $x \neq 0$ (¿por qué?). Usando la tercera obtenemos que $y = \sqrt{-x^3} \neq 0$. Como $y \neq 0$ la segunda ecuación implica que $\lambda = 0$. Pero al sustituir $\lambda = 0$ obtenemos una contradicción. Por tanto, este sistema formado por las ecuaciones de Lagrange no tiene solución.

¿Qué es lo que falla? El Jacobiano de g es

$$Dg(x, y) = (3x^2, 2y)$$

El punto $(0, 0)$ verifica la restricción del problema, pero

$$\text{rg}(Dg(0, 0)) = \text{rg}(0, 0) = 0$$

por lo que la condición de regularidad no se verifica.

2.2. Condiciones de Segundo Orden. Recordemos la definición del conjunto factible 2.2 para el problema 2.1

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}$$

y la definición de espacio tangente 2.4 a M en un punto $p \in M$,

$$T_p M = p + \{v \in \mathbb{R}^n : Dg(p)v = 0\}$$

Observamos ahora que un vector v pertenece al conjunto $\{v \in \mathbb{R}^n : Dg(p)v = 0\}$ si y sólo si v verifica las ecuaciones siguientes

$$(2.6) \quad \nabla g_1(p) \cdot v = \nabla g_2(p) \cdot v = \cdots = \nabla g_m(p) \cdot v = 0$$

Las condiciones suficientes de segundo orden se expresan utilizando el Hessiano de la función de Lagrange y las ecuaciones anteriores.

Proposición 2.7 (Condiciones Suficientes de Segundo Orden). Supongamos que las funciones $f, g_1, \dots, g_m$ son de clase C^2 y que se verifica la condición de regularidad 2.3. Supongamos que hemos encontrado unos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$ de manera que si

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$$

es la función de Lagrange asociada al problema 2.1, se verifica que

- el punto p satisface las restricciones $g_1(p) = g_2(p) = \dots = g_m(p) = 0$,
- el punto p verifica las ecuaciones de Lagrange, $\nabla L(p) = 0$.

Entonces tenemos que,

- (1) Si $v \cdot \text{H} L(p)v < 0$ para todo vector $v \neq 0$ que verifique las ecuaciones 2.6, entonces p es un máximo local (estricto) de f .
- (2) Si $v \cdot \text{H} L(p)v > 0$ para todo vector $v \neq 0$ que verifique las ecuaciones 2.6, entonces p es un mínimo local (estricto) de f .

Ejemplo 2.8. Vamos a resolver el problema

$$\begin{aligned} \max \quad & xy \\ \text{s.a.} \quad & p_1x + p_2y = m \end{aligned}$$

con $m, p_1, p_2 \neq 0$.

Sea $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = m - p_1x - p_2y$. Entonces $\nabla g(x, y) = (y, x)$ que es no nulo en el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_1x + p_2y = m\}$. Por tanto, se verifica la condición de regularidad. Construimos el lagrangiano

$$L(x) = xy + \lambda(m - p_1x - p_2y).$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} y - \lambda p_1 &= 0 \\ x - \lambda p_2 &= 0 \\ p_1x + p_2y &= m. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$x^* = \frac{m}{2p_1}, \quad y^* = \frac{m}{2p_2}, \quad \lambda = \frac{m}{2p_1p_2}$$

El hessiano de L en el punto

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}; \frac{m}{2p_1p_2} \right)$$

es

$$\text{H} L(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es una matriz indefinida. Por otra parte,

$$\begin{aligned} T_{(x^*, y^*)} M &= \{v \in \mathbb{R}^2 : \nabla g\left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right) \cdot v = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : (p_1, p_2) \cdot (v_1, v_2) = 0\} \\ &= \left\{ \left(t, -\frac{p_1}{p_2}t\right) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\left(t, -\frac{p_1}{p_2}t\right) \cdot \text{H} L(x^*, y^*) \begin{pmatrix} t \\ -\frac{p_1}{p_2}t \end{pmatrix} = \left(t, -\frac{p_1}{p_2}t\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\frac{p_1}{p_2}t \end{pmatrix} = -\frac{p_1}{p_2}t^2 < 0$$

si $t \neq 0$. Por lo tanto,

$$\left(\frac{m}{2p_1}, \frac{m}{2p_2}\right)$$

es un máximo.

Ejemplo 2.9. Vamos a resolver el problema

$$\begin{aligned} \max \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad & xy = 4 \end{aligned}$$

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = xy$. Entonces $\nabla g(x, y) = 2(y, x)$ que es no nulo en el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 4\}$. Por tanto, se verifica la condición de regularidad. Construimos el lagrangiano

$$L(x) = x^2 + y^2 + \lambda xy.$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 2x + \lambda y &= 0 \\ 2y + \lambda x &= 0 \\ xy &= 4. \end{aligned}$$

Este sistema tiene dos soluciones

$$\begin{aligned} x &= y = 2, \lambda = -2 \\ x &= y = -2, \lambda = -2. \end{aligned}$$

El hessiano de L es en el punto $(2, 2; -2)$ es

$$\text{H} L_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=-2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} T_{(2,2)}M &= \{v \in \mathbb{R}^2 : \nabla g(2, 2) \cdot v = 0\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : (2, 2) \cdot (v_1, v_2) = 0\} \\ &= \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Por tanto

$$(t, -t) \cdot \text{H} L_{(2,2)} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = (t, -t) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2$$

por lo que $\text{H} L_{(2,2)}$ es definida positiva sobre $T_{(2,2)}M$ de donde se concluye que $(2, 2)$ es un mínimo.

Corolario 2.10. Supongamos que las funciones $f, g_1, \dots, g_m$ son de clase C^2 y que se verifica la condición de regularidad 2.3. Supongamos que hemos encontrado unos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$ de manera que si

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$$

es la función de Lagrange asociada al problema 2.1. se verifica que

- el punto p satisface las restricciones $g_1(p) = g_2(p) = \dots = g_m(p) = 0$,
- el punto p verifica las ecuaciones de Lagrange, $\nabla L(p) = 0$.

Entonces tenemos que,

- (1) Si $H L(p)$ es definida negativa, entonces p es un máximo local (estricto) de f .
- (2) Si $H L(p)$ es definida positiva, entonces p es un mínimo local (estricto) de f .

3. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD: MÉTODO DE KUHN-TUCKER

Ahora vamos a estudiar problemas de optimización con restricciones de desigualdad

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(x) \geq 0 \\ & g_2(x) \geq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Definición 3.1. Dado un punto $p \in \mathbb{R}^n$ decimos que la restricción $k = 1, 2, \dots, m$ es activa (o efectiva, o que se satura) en el punto p para el problema 3.1 si $g_k(p) = 0$. Si se verifica que $g_k(p) > 0$ decimos que la restricción k es inactiva (o no efectiva o que no se satura) para el punto p .

Al problema de optimización 3.1 le asociamos el Lagrangiano

$$(3.2) \quad L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$$

Proposición 3.2 (Método de Kuhn-Tucker). Supongamos que las funciones $f, g_1, \dots, g_m$ son de clase C^1 y que se verifica la condición de regularidad 2.3. Si p es una solución del problema 3.1, entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

- (1) $\nabla L(p) = 0$,
- (2) $\lambda_1 g_1(p) = 0, \dots, \lambda_m g_m(p) = 0$,
- (3) $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$,

donde $L(x)$ es la **función de Lagrange o Lagrangiano** definida en 3.2.

Observación 3.3. Las ecuaciones

- (1) $\nabla L(p) = 0$,
- (2) $\lambda_1 g_1(p) = 0, \dots, \lambda_m g_m(p) = 0$,
- (3) $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$,
- (4) $g_1(p) \geq 0, \dots, g_m(p) \geq 0$.

son las ecuaciones de de Kuhn-Tucker del problema 3.1.

Ejemplo 3.4 (sustitutos perfectos). Supongamos que la renta de un agente es 5 y que su función de utilidad sobre dos bienes de consumo es $u(x, y) = 2x + y$. Si los precios de los bienes son $p_1 = 3, p_2 = 1$ ¿cuál es la demanda de cada bien?

El problema de maximización de la utilidad del agente es

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & 3x + y \leq 5 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

En primer lugar escribimos este problema en la forma 3.1

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x + y \\ \text{s.a.} \quad & 5 - 3x - y \geq 0 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

El Lagrangiano asociado es

$$L(x, y) = 2x + y + \lambda_1(5 - 3x - y) + \lambda_2x + \lambda_3y$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker del problema son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2 - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(5 - 3x - y) &= 0 \\ \lambda_2x &= 0 \\ \lambda_3y &= 0 \\ 3x + y &\leq 5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Observamos que si $\lambda_1 = 0$ entonces la primera ecuación implica que $\lambda_2 = -2 < 0$, que contradice la ecuación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$. Por lo tanto, $\lambda_1 > 0$. De la ecuación $\lambda_1(5 - 3x - y) = 0$ concluimos ahora que $5 - 3x - y = 0$ por lo que

$$y = 5 - 3x$$

Supongamos que $x > 0$. En este caso, la ecuación $\lambda_2x = 0$ implica que $\lambda_2 = 0$. De la primera ecuación deducimos que $\lambda_1 = 2/3$ y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $\lambda_3 = \lambda_1 - 1 = -1/3 < 0$ que contradice la ecuación $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$.

Concluimos entonces que $x = 0$ y por tanto $y = 5$. Vemos que

$$x = 0, \quad y = 5, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0$$

es la única solución del sistema.

Observación 3.5. Las ecuaciones Kuhn-Tucker de la proposición 3.2 sólo son válidas cuando el problema está escrito en la forma 3.1. Si, por ejemplo, se pide resolver un problema de minimización o las desigualdades son $\geq$ en lugar de $\leq$, entonces el problema se puede transformar de forma trivial para convertirlo en uno que venga descrito en la forma 3.1. Por ejemplo, si nos piden minimizar $f(x)$, esto es equivalente a maximizar $-f(x)$; o bien, si la restricción i -ésima es $g_i(x) \leq a_i$, eso equivale a la restricción $a_i - g_i(x) \geq 0$.

4. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Consideremos el problema,

$$\begin{aligned}
& \max && f(x) \\
& \text{s.a.} && g_1(x) = \alpha_1 \\
\text{(L2)} &&& g_2(x) = \alpha_2 \\
&&& \vdots \\
&&& g_m(x) = \alpha_m
\end{aligned}$$

Supongamos que la solución $x(\alpha_1 \dots, \alpha_m)$ del problema anterior es única y satisface las ecuaciones de Lagrange. Es decir, $x = x(\alpha_1 \dots, \alpha_m)$, es un punto crítico del Lagrangiano,

$$L(x) = f(x) + \lambda_1(\alpha_1 - g_1(x)) + \dots + \lambda_m(\alpha_m - g_m(x))$$

Los multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ también dependen de los parámetros $\alpha_1 \dots, \alpha_m$, pero esto no lo escribimos explícitamente. Consideremos la función

$$F(\alpha_1 \dots, \alpha_m) = f(x(\alpha_1 \dots \alpha_m))$$

Entonces, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$(4.1) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = \lambda_i$$

Observación 4.1. Vamos a justificar la ecuación 4.1 para el caso en que sólo hay una restricción

$$\begin{aligned}
& \max && f(x) \\
& \text{s.a.} && g(x) = \alpha
\end{aligned}$$

Llamamos λ al multiplicador de Lagrange y $x(\alpha)$ a la solución de este problema. Entonces las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} \quad k = 1, \dots, n$$

Por una parte, como $x(\alpha)$ verifica la restricción tenemos que

$$g(x(\alpha)) = \alpha$$

y derivando esta ecuación implícitamente obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_k}(x(\alpha)) \frac{\partial x_k}{\partial \alpha}(\alpha) = 1$$

Por otra parte, usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial f(x(\alpha))}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x(\alpha)) \frac{\partial x_k}{\partial \alpha}(\alpha) = \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_k}(x(\alpha)) \frac{\partial x_k}{\partial \alpha}(\alpha) = \lambda$$

Observación 4.2. La ecuación 4.1 también es válida cuando las restricciones son de desigualdad.

Ejemplo 4.3 (Utilidad Indirecta). Consideremos el problema,

$$\begin{aligned}
& \max && u(x, y) \\
& \text{sujeto a:} && p_1 x + p_2 y = m
\end{aligned}$$

Dados los precios (p_1, p_2) , el consumidor escoge una cesta de consumo (x, y) sujeto a las restricciones, el coste es $p_1x + p_2y = m$ y la renta del agente es m .

Para resolver este problema consideramos la función de Lagrange,

$$L(x) = u(x) + \lambda(m - p_1x - p_2y)$$

Sea $x(p_1, p_2, m)$, $y(p_1, p_2, m)$ la solución (consideremos que es única). Sea,

$$V(p_1, p_2, m) = u(x(p_1, p_2, m))$$

la función Indirecta de Utilidad. Entonces,

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \lambda$$

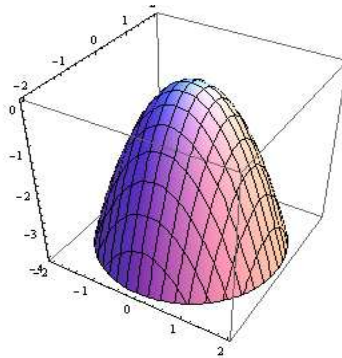
Por lo que λ es la utilidad marginal de la renta.

5. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES CONVEXAS (CÓNCAVAS)

Sea D un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Consideremos cualquiera de los siguientes problemas:

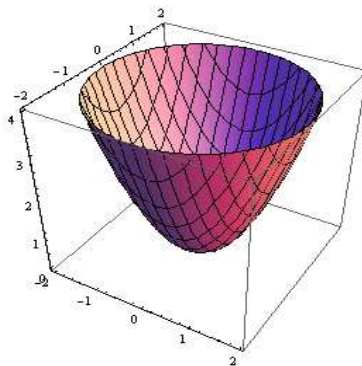
- (1) La función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava en D y estudiamos el problema

$$\max_{x \in D} f(x)$$



(2) La función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en D y estudiamos el problema

$$\min_{x \in D} f(x)$$



Proposición 5.1. Sea D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) si f es cóncava y p es un máximo local de f en D , entonces p es un máximo global de f en D .
- (2) si f es convexa, y $p \in D$ es un mínimo local de f en D , entonces p es un mínimo global de f en D .

Proposición 5.2. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $p \in D$ y $f \in C^1(D)$.

- (1) Si f es cóncava en D , entonces p es un máximo global de f en D si y solo si $\nabla f(p) = 0$.
- (2) Si f es convexa en D , entonces p es un mínimo global de f en D si y solo si $\nabla f(p) = 0$.

Demostración Si, por ejemplo, f es cóncava, entonces para cada $x \in D$ tenemos que

$$f(x) \leq f(p) + \nabla f(p)(x - p) = f(p)$$

ya que $\nabla f(p) = 0$.

Observación 5.3. Si una función es estrictamente cóncava (resp. convexa) entonces se verifica que

$$f(x) < f(p) + \nabla f(p)(x - p) = f(p)$$

y vemos que si tiene un máximo (resp. mínimo), entonces éste es único. También se puede demostrar directamente a partir de la definición, sin necesidad de utilizar las condiciones de primer orden.