Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 17 de mayo de 2019.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 3 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - y - az &= b \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. **5 puntos**

(b) Resuelva el sistema de ecuaciones para los valores $a = -1$, $b = 4$. **3 puntos**

(2) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 + 1 \leq y \leq 3x + 1\}$ y la función

$$f(x, y) = \sqrt{\log(x + y)}$$

definida en el conjunto A.

(a) Dibuje el conjunto A y justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo. **5 puntos**

(b) Enuncie el teorema Weierstrass. Determine si es posible aplicar este teorema a la función f definida en el conjunto A. Utilizando las curvas de nivel, determine (en caso de que existan) los puntos extremos globales de la función f en el conjunto A. **5 puntos**

(3) Considere la función $f(x, y) = 2x + y - \ln x - \ln y$.

(a) Determine su dominio y las regiones de $\mathbb{R}^2$ donde la función es cóncava o convexa. **5 puntos**

(b) Estudie la existencia de extremos globales de la función f en su dominio. **5 puntos**

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 y + z e^y &= -1 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. **3 puntos**

(b) Calcule

$$y'(1), z'(1)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$. **5 puntos**

---

(5) Considere la función $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3$, donde $a \neq 0$ es un parámetro.

(a) Determine los puntos críticos de f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. **5 puntos**

(b) Clasifique, de acuerdo a los valores del parámetro a, los puntos críticos de f. **5 puntos**

(c) Determine el valor del parámetro a para el cual hay un máximo local donde la función f alcanza el valor 8 y el valor del parámetro a para el cual hay un mínimo local donde la función f. alcanza el valor -1. **5 puntos**

---

(6) Considere las funciones $f(x, y) = xy$ and $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ y el conjunto $S = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$.

(a) Explique por qué $f(x, y)$ alcanza un máximo global en el conjunto S. $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

(b) Utilizando el método de Lagrange encuentre el máximo global de f $f(x, y)$ en el conjunto S. $\boxed{\textbf{7 puntos}}$