

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + (3a + 1)y + (3a + 4)z = 1 + a - b \\ x + 2y + 3z = 1 \\ -2ax + (2 - 2a)y + (7 - 5a)z = 3 - 2a - ab - 2b \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Se pide:

- (a) Clasifique el sistema según los valores de a y b . **1 punto**

- (b) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a = -1$, $b = -3$. **1 punto**

- (2) Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 1 - x^2 \leq y, x - 1 \leq y\}$ y la función

$$f(x, y) = \frac{-x - 2y}{2}$$

definida en A .

- (a) Represente de forma aproximada el conjunto A y justifique adecuadamente si es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo. **1 punto**

- (b) Indique si se puede aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en A . A partir de las curvas de nivel determine, si existen, los puntos en los que la función alcanza su máximo y mínimo globales. **1 punto**

- (3) Considere la función $f(x, y) = x^3 + 2x^2 + 2xy - 16x + \frac{y^2}{2} - 2y - 4$.

- (a) Determine los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$ más grandes donde la función es estrictamente cóncava o estrictamente convexa. **1 punto**

- (b) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. Clasifique los puntos críticos hallados. Determine, de forma justificada, si alguno de los puntos críticos es un extremo global. **1 punto**

- (4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} -u^3 + v^2 + x^2 - y^2 + 4 &= 0 \\ -2u^2 + 3v^4 + 2xy + y^2 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Demuestre que el sistema de ecuaciones define de manera implícita unas funciones diferenciables $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en un entorno del punto $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$. **0,5 puntos**

- (b) Calcule

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2, -1), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(2, -1), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(2, -1), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(2, -1)$$

1 punto

- (c) Utilizando el apartado anterior y el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $u(x, y)$ calcule un valor aproximado de $u(1.99, -1.019)$. **0,5 puntos**

- (5) Se considera la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y$ y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

- (a) Verifique las hipótesis del Teorema de Lagrange. Plantee las ecuaciones de Lagrange para f en la esfera. Obtenga los puntos que satisfacen las ecuaciones y el valor de los multiplicadores de Lagrange correspondientes. **1 punto**

- (b) Asuma que la esfera es un conjunto cerrado y acotado. Utilizando la parte (a), determine los puntos extremos de la función f en la esfera. Determine qué puntos extremos corresponden a máximos y cuáles a mínimos, locales o globales. Justifique su respuesta. **1 punto**