Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2018.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+(3a+1)y+(3a+4)z & = & 1+a-b \\ x+2y+3z & = & 1 \\ -2ax+(2-2a)y+(7-5a)z & = & 3-2a-ab-2b \end{array}\right.$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Se pide:

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *La matriz ampliada del sistema es*

$$\begin{pmatrix} a & 3a+1 & 3a+4 & a-b+1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2a & 2-2a & 7-5a & -ba-2a-2b+3 \end{pmatrix}$$

Intercambiando las filas 1 y 2 obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ a & 3a+1 & 3a+4 & a-b+1 \\ -2a & 2-2a & 7-5a & -ba-2a-2b+3 \end{pmatrix}$$

Ahora realizamos las operaciones: fila 2 $\mapsto$ *fila 2*$-a\times$*fila 1, fila 3* $\mapsto$ *fila 3*$+2a\times$*fila 1. Y se obtiene que el sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & 4 & 1-b \\ 0 & 2a+2 & a+7 & -ab-2b+3 \end{pmatrix}$$

Y ahora realizamos la operación fila 3 $\mapsto$ *fila 3* $-\,2\times$ *fila 2 y obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & 4 & 1-b \\ 0 & 0 & a-1 & 1-ab \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la última fila, obtenemos que el determinante del sistema es $(a+1)(a-1)$. *Deducimos que si* $a \neq 1$ *y* $a \neq -1$ *el sistema es compatible determinado.*

(i) *Supongamos que* $a = 1$. *El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

(A) *Si* $b \neq 1$ *el sistema es incompatible, porque* $\text{rango}(A) = 2 < \text{rango}(A|B) = 3$.

(B) *Si* $b = 1$ *el sistema es compatible indeterminado con* 1 *parámetro, porque* $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$.

(ii) *Supongamos ahora que* $a = -1$. *El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1-b \\ 0 & 0 & -2 & b+1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b+1 \\ 0 & 0 & 4 & 1-b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{pmatrix}$$

(A) *Si* $b \neq -3$ *el sistema es incompatible, porque* $\text{rango}(A) = 2 < \text{rango}(A|B) = 3$.

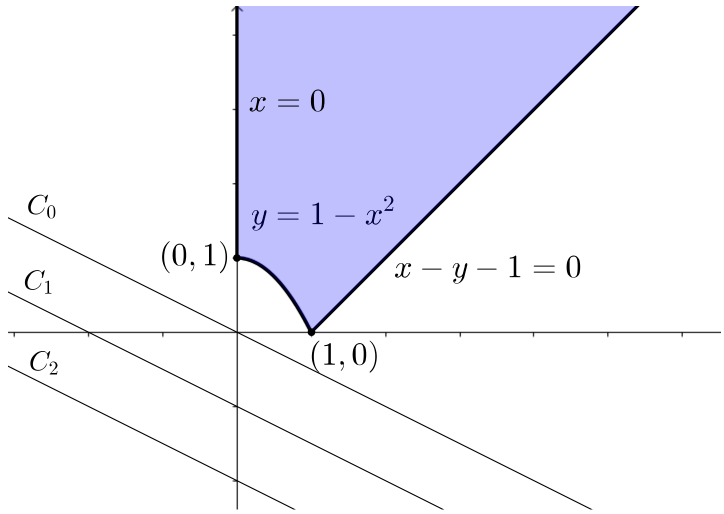
(B) *Si* $b = -3$ *el sistema es compatible indeterminado con* 1 *parámetro, porque* $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$.

(b) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a = -1$, $b = -3$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{\begin{array}{lcr} x+2y+3z & = & 1 \\ -2z & = & -2 \end{array}\right.$$

Eligiendo y *como parámetro, el conjunto de soluciones es* $\{(-2-2y, y, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.



(2) Se considera el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x,\ 1 - x^2 \leq y,\ x - 1 \leq y\}$ y la función

$$f(x,y) = \frac{-x-2y}{2}$$

definida en A.

(a) Represente de forma aproximada el conjunto A y justifique adecuadamente si es abierto, cerrado, acotado, compacto y convexo. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *El conjunto A es aproximadamente como se indica la figura. Es cerrado porque contiene a su frontera. No es abierto porque* $A \cap \partial A \neq \emptyset$. *No es acotado, pues no existe ningún radio con el que una bola centrada en el origen lo abarque. No es, por tanto, compacto. Y tampoco es convexo pues el segmento que une* $(1,0)$ *y* $(0,1)$ *no queda contenido en el conjunto.*

(b) Indique si se puede aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en A. A partir de las curvas de nivel determine, si existen, los puntos en los que la función alcanza su máximo y mínimo globales. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *No se puede aplica el teorema de Weierstrass porque si bien* f *es continua en todo* $\mathbb{R}^2$ *el conjunto* A *no es compacto pues no es acotado.*
Si representamos tres curvas de nivel se observa que según la dirección de crecimiento el máximo global se alcanza en el punto $(1,0)$, *por otro lado la función no alcanza su mínimo global pues en puntos de* A *que se alejan del origen, por ejemplo de la forma* $(0,a)$ *cuando* $a \to \infty$ *se tiene que* $f(0,a) = \frac{-2a}{2} \to -\infty$

(3) Considere la función $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + 2xy - 16x + \frac{y^2}{2} - 2y - 4$.

(a) Determine los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$ más grandes donde la función es estrictamente cóncava o estrictamente convexa. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *El gradiente de f es*

$$\big(3x^2 + 4x + 2y - 16, 2x + y - 2\big)$$

La matriz Hessiana es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que $D_1 = 6x + 4$ y $D_2 = 6x$. Vemos que si $x > 0$, entonces $D_1 > 0$, $D_2 > 0$. Concluimos que la función es convexa en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. La función no puede ser cóncava ya que si $D_1 < 0$ entonces $x < -2/3$ y tendríamos que $D_2 < 0$.

(b) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. Clasifique los puntos críticos hallados. Determine, de forma justificada, si alguno de los puntos críticos es un extremo global. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Las ecuaciones que definen los puntos críticos son*

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 4x + 2y - 16 \\ 0 &= 2x + y - 2 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos $y = 2 - 2x$. Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación, obtenemos $3x^2 - 12 = 0$. Es decir, $x = \pm 2$. Concluimos que las soluciones son $(-2,6)$, $(2,-2)$. Vemos que

$$H(2,-2) = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$H(-2,6) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $(2,-2)$ es un mínimo local y $(-2,6)$ es un punto de silla. Finalmente, vemos que $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ por lo que no hay máximo global ni mínimo global.

(4) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} -u^3+v^2+x^2-y^2+4 &= 0 \\ -2u^2+3v^4+2xy+y^2+8 &= 0 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que el sistema de ecuaciones define de manera implítica unas funciones diferenciables $u(x,y)$ y $v(x,y)$ en un entorno del punto $(x,y,u,v)=(2,-1,2,1)$. **0,5 puntos**

Solución: *Sea* $f_1(x,y,u,v)=-u^3+v^2+x^2-y^2+4$, $f_2(x,y,u,v)=-2u^2+3v^4+2xy+y^2+8$. *Estas funciones son diferenciables de todos los órdenes. Además,* $f_1(2,-1,2,1)=f_2(2,-1,2,1)=0$. *Calculamos el Jacobiano*

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 12v^3 \end{vmatrix}=8uv-36u^2v^3$$

que en el punto $(x,y,u,v)=(2,-1,2,1)$ *vale* -128. *Hemos comprobado que se verifican las hipótesis del Teorema de la función implítica, por lo que las ecuaciones anteriores definen de manera implícita unas funciones diferenciable* $u(x,y)$ *y* $v(x,y)$ *en un entorno del punto* $(x,y,u,v)=(2,-1,2,1)$.

(b) Calcule

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,-1),\quad \frac{\partial v}{\partial x}(2,-1)\quad \frac{\partial u}{\partial y}(2,-1),\quad \frac{\partial v}{\partial y}(2,-1)$$

1 punto

Solución: *Derivando implícitamente las ecuaciones respecto a* x *obtenemos que*

$$\begin{aligned} 2x-3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ 2y-4u\frac{\partial u}{\partial x}+12v^3\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo ahora $(x,y,u,v)=(2,-1,2,1)$ *obtenemos las ecuaciones*

$$\begin{aligned} 4-12\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ -2-8\frac{\partial u}{\partial x}+12\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos $\frac{\partial u}{\partial x}(2,-1)=\frac{13}{32}$, $\frac{\partial v}{\partial x}(2,-1)=\frac{7}{16}$. *Derivando ahora implícitamente las ecuaciones respecto a* y *obtenemos que*

$$\begin{aligned} -2y-3u^2\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ 2x+2y-4u\frac{\partial u}{\partial y}+12v^3\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo ahora $(x,y,u,v)=(2,-1,2,1)$ *obtenemos las ecuaciones*

$$\begin{aligned} 2-12\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ 2-8\frac{\partial u}{\partial y}+12\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos $\frac{\partial u}{\partial y}(2,-1)=\frac{5}{32}$, $\frac{\partial v}{\partial y}(2,-1)=-\frac{1}{16}$.

(c) Utilizando el apartado anterior y el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $u(x,y)$ calcule un valor aproximado de $u(1.99,-1.019)$. **0,5 puntos**

Solución: *Recordemos que el polinomio de Taylor de* $u(x,y)$ *en el punto* (a,b) *es*

$$P_2(x,y)=u(a,b)+\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Sustituyendo $(a,b)=(2,-1)$, $(x,y)=(1.99,-1.019)$ *obtenemos*

$$P_2(1.99,-1.019)=u(2,-1)+\frac{\partial u}{\partial x}(2,-1)(-0.01)+\frac{\partial u}{\partial y}(2,-1)(-0.019)=2-0.01\times\frac{13}{32}-0.019\times\frac{5}{32}=1.93203$$

(5) Se considera la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3x-4y$ y la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 25$.

(a) Verifique las hipótesis del Teorema de Lagrange. Plantee las ecuaciones de Lagrange para f en la esfera. Obtenga los puntos que satisfacen las ecuaciones y el valor de los multiplicadores de Lagrange correspondientes. **1 punto**

(b) Asuma que la esfera es un conjunto cerrado y acotado. Utilizando la parte (a), determine los puntos extremos de la función f en la esfera. Determine qué puntos extremos corresponden a máximos y cuáles a mínimos, locales o globales. Justifique su respuesta. **1 punto**

Solución:

(a) *La función objetivo f y la restricción $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-25$ son ambas de clase C^1 (de hecho, son de clase C^n para cualquier n). Además, el gradiente de h, $\nabla h(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, se anula sólamente en el punto $(0,0,0)$, que no satisface la restricción. Por lo tanto, se verifican las hipótesis del Teorema de Lagrange Theorem. Los puntos extremos de f son puntos críticos del Lagrangiano*

$$L(z,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-3x-4y-\lambda(x^2+y^2+z^2-25).$$

Las ecuaciones de lagrange son:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) & = & 2x-3-2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) & = & 2y-4-2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) & = & 2z-2z\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z) & = & -(x^2+y^2+z^2-25) = 0. \end{cases}$$

La tercera ecuación puede escribirse como $2z(1-\lambda) = 0$. Observamos que $\lambda = 1$ contradice la primera y la segunda ecuación. Por lo tanto, $z = 0$. Ahora de la primera y segunda ecuación obtenemos que

$$x = \frac{3}{2(1-\lambda)}, \quad y = \frac{4}{2(1-\lambda)}$$

Sustituyendo estos valores de x, y y $z = 0$ en la ecuación de la restricción obtenemos que

$$\frac{9}{4(1-\lambda)^2} + \frac{16}{4(1-\lambda)^2} = 25,$$

y despejando $(1-\lambda)^2$, obtenemos que $(1-\lambda)^2 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Es decir, $1-\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores de $1-\lambda$ en la expresión de x e y encontramos los puntos críticos

$$P_1 = (3,4,0), \text{ with } \lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ and } P_2 = (-3,-4,0) \text{ with} \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

(b) *Usaremos las condiciones de segundo orden para caracterizar los puntos críticos. La matriz Hessiana asociada al Lagrangiano con respecto a (x,y,z) es*

$$\mathcal{H}L_{x,y,z}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}.$$

En el punto P_1, la matriz Hessians es definida positiva. Por lo tanto, P_1 es un mínimo local de f sobre la esfera. En el punto P_2, la matrix Hessiana es definida negativa. Por lo tanto, P_2 es un máximo local de f sobre la esfera.

Alternativamente, podemos aplicar el Teorema de Weierstrass. La esfera es un conjunto compacto y la función objetivo es continua. Por lo tanto, f alcanza un máximo y un mínimo globales sobre la esfera. Puesto que estos puntos extremos satisfacen las ecuaciones de Lagrange, concluimos que P_1 corresponde a un máximo global y P_2 corresponde a un mínimo global.