Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2017.

---

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de un parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax + y + z & = & b \\ ax + ay + z & = & a \\ x + ay + az & = & 1 \end{array} \right.$$

se pide:

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

(b) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a = b = -1$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

---

(2) Considere la función $f(x, y) = 4x - y$ y el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y < 9,\ x^2 \leq y\}$..

(a) Represente gráficamente el conjunto A, su frontera, clausura e interior. Justifique si la función f y el conjunto A verifican las condiciones del Teorema de Weierstrass. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

(b) Represente las curvas de nivel de la función f sobre el conjunto A, indicando las direcciones de crecimiento/decrecimiento. Mediante las curvas de nivel, determine (si existen) los extremos globales de f en A. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

---

(3) Considere la función $f(x, y) = bx^2 + y^3 - 6bxy$ con $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

(a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

(b) Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales y globales) y puntos de silla. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

---

(4) Se considera la ecuación $3xz - 8y^3 - z^3 + 6z = 3$.

(a) Demuestre que la ecuación anterior define una función diferenciable $z(x, y)$ en un entorno del punto $(2, 1, 1)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

(b) Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x, y)$, calculada en el apartado anterior, en el punto $(2, 1)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

---

(5) Se considera la función $f(x, y, z) = 2x + y^2 + z^2$ definida en el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0\}$

(a) Plantee las ecuaciones de Lagrange para f en el conjunto A. Obtenga los puntos que satisfacen las ecuaciones y el valor de los multiplicadores de Lagrange correspondientes. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

(b) Sabiendo que el conjunto A es cerrado y acotado, estudie la existencia de extremos globales y si existen proporciona los puntos donde se alcanzan y su valor. $\boxed{\textbf{1 punto}}$
