Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2017.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de un parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & b \\ ax + ay + z & = & a \\ x + ay + az & = & 1 \end{array} \right.$$

se pide:

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *La matriz ampliada del sistema es*

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ a & a & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Tras las siguientes operaciones elementales con filas

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a^2 & b-a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

se obtiene que el sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la última fila, obtenemos que el determinante del sistema es $(1-a)(1-a^2) = (1-a)^2(1+a)$. *Deducimos que si* $a \neq 1$ *y* $a \neq -1$ *el sistema es compatible determinado.*
Supongamos que $a = 1$. *El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Si $b \neq 1$ *el sistema es incompatible. Mientras que si* $b = 1$, *el sistema es compatible indeterminado con* $3 - 1 = 2$ *parámetros.*
Supongamos ahora que $a = -1$. *El sistema propuesto es equivalente al sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$$

Y vemos que $\text{rango}(A) = 2$. *Si* $b \neq -1$, *entonces* $\text{rango}(A|b) = 3$ *y el sistema es incompatible. Mientras que si* $b = -1$, *entonces* $\text{rango}(A|b) = 2$ *y el sistema es compatible indeterminado con* $3 - 2 = 1$ *parámetro.*

(b) Resuelva el sistema anterior para el valor de $a = b = -1$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *El sistema propuesto es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales*

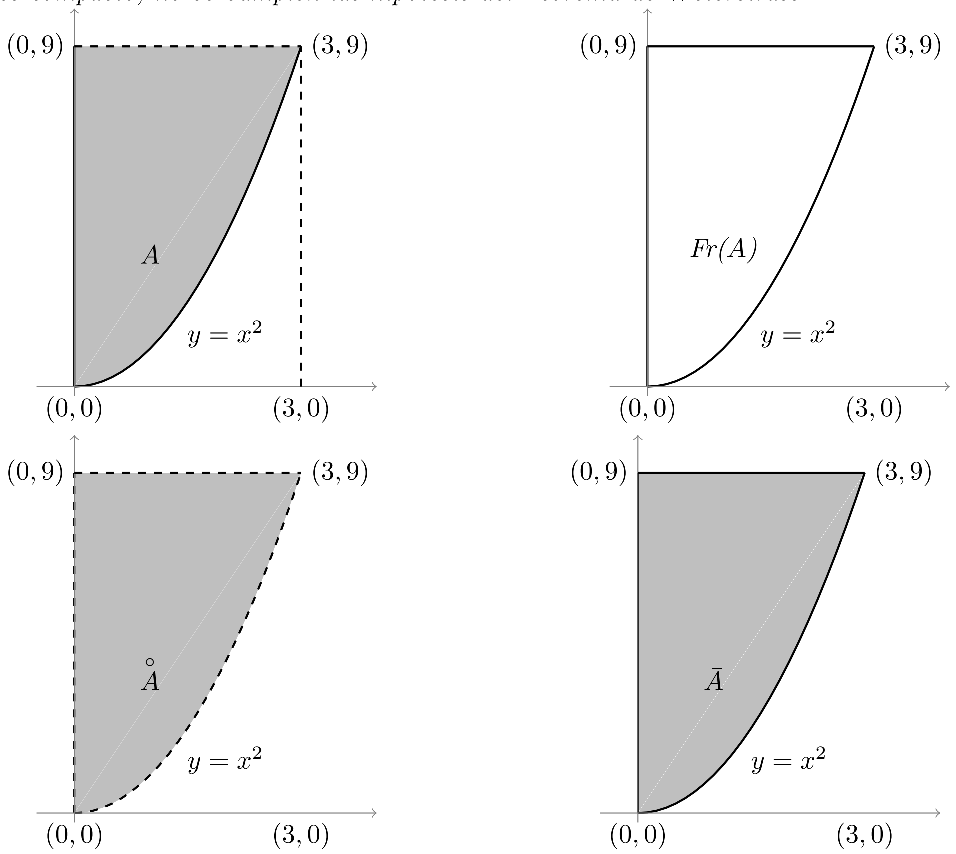
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Eligiendo z *como parámetro, el conjunto de soluciones es* $\{(1+z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(2) Considere la función $f(x,y) = 4x - y$ y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le x \le 3, \; 0 \le y < 9, \; x^2 \le y\}$..

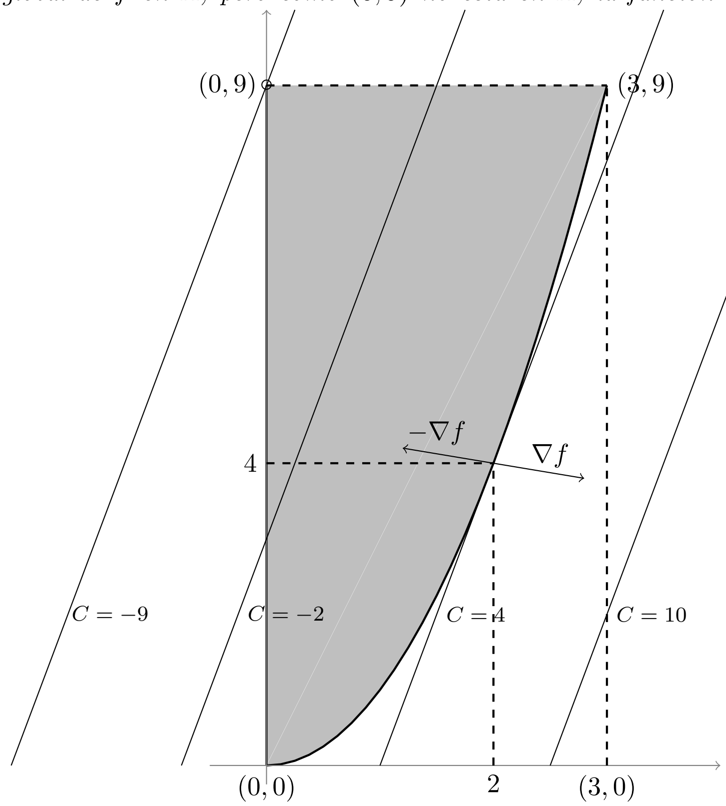
(a) Represente gráficamente el conjunto A, su frontera, clausura e interior. Justifique si la función f y el conjunto A verifican las condiciones del Teorema de Weierstrass. **1 punto**

Solución: *El conjunto A no es cerrado, pues no contiene su frontera, ya que el segmento que une los puntos $(0,9)$ y $(3,9)$, forma parte de la frontera de A, pero no pertenece a A. Dado que A no es compacto, no se cumplen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.*



(b) Represente las curvas de nivel de la función f sobre el conjunto A, indicando las direcciones de crecimiento/decrecimiento. Mediante las curvas de nivel, determine (si existen) los extremos globales de f en A. **1 punto**

Solución: *Las curvas de nivel son rectas de pendiente 4, $4x - y = C$, donde $C \in \mathbb{R}$. El gradiente de f, $\nabla f = (4, -1)$, marca la dirección de máximo crecimiento de f, así como $-\nabla f = (-4, 1)$, la de máximo decrecimiento. El valor máximo de f en A se halla en el punto (a,b) de tangencia de la recta de nivel mayor que corta a A con la gráfica de $y = x^2$. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ en el punto (a,b) es $2a$, luego $2a = 4$, es decir, $a = 2$. Por otra parte, $b = a^2 = 4$ y $4a - b = C$ implica $C = 4$. Concluimos que el máximo global de f en A es $(a,b) = (2,4)$ y el valor máximo es $C = 4$. En cuanto a los posibles mínimos, la función f decrece a medida que las curvas de nivel se desplazan hacia la esquina superior izquierda del conjunto A. Si el punto $(0,9)$ perteneciera* *a A, sería el mínimo global de f en A, pero como $(0,9)$ no está en A, la función f no alcanza*



mínimo global en A.

(3) Considere la función $f(x,y) = bx^2 + y^3 - 6bxy$ con $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

(a) Determine los puntos críticos (si existen) de la función f en el conjunto $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *El gradiente de f es*

$$\left(2bx - 6by, 3y^2 - 6bx\right)$$

las ecuaciones que definen los puntos críticos son

$$\begin{aligned} 0 &= b(2x - 6y) \\ 0 &= 3y^2 - 6bx \end{aligned}$$

Como $b \neq 0$, las soluciones son $(0,0)$, $(18b, 6b)$.

(b) Clasifique los puntos críticos del apartado anterior en máximos, mínimos (locales y globales) y puntos de silla. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *La matriz Hessiana es*

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2b & -6b \\ -6b & 6y \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2b & -6b \\ -6b & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(H(0,0)) = -36b^2 < 0$, el punto $(0,0)$ es un punto de silla. Por otra parte

$$H(18b, 6b) = \begin{pmatrix} 2b & -6b \\ -6b & 36b \end{pmatrix}$$

Obtenemos que $D_1 = 2b$ y $D_2 = 36b^2 > 0$. Concluimos que si $b > 0$ el punto $(18b, 6b)$ corresponde a un mínimo local, mientras que si $b < 0$ el punto $(18b, 6b)$ corresponde a un máximo local. Finalmente, $f(0,y) = y^3$ y vemos que $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = +\infty$, $\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = -\infty$ por lo que no hay máximo global ni mínimo global.

(4) Se considera la ecuación $3xz - 8y^3 - z^3 + 6z = 3$.

(a) Demuestre que la ecuación anterior define una función diferenciable $z(x,y)$ en un entorno del punto $(2,1,1)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Sea* $f(x,y,z) = 3xz - 8y^3 - z^3 + 6z - 3$. *Como*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1) = 3x - 3z^2 + 6\big|_{x=2,y=1,z=1} = 9$$

por el Teorema de la función implícita, la ecuación $3xz - 8y^3 - z^3 + 6z = 3$ *define a* z *como una función de las variables* x *e* y*, definida en un entorno del punto* $(2,1)$.

(b) Calcule el polinomio de Taylor de orden 1 de la función $z(x,y)$, calculada en el apartado anterior, en el punto $(2,1)$. $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Solución: *Derivando la ecuación* $3xz - 8y^3 - z^3 + 6z = 3$ *implícitamente respecto a* x *e* y *obtenemos*

$$\begin{aligned} 3z + 3x\frac{\partial z}{\partial x} - 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 3x\frac{\partial z}{\partial y} - 24y^2 - 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

y sustituyendo ahora $x = 2, y = 1, z = 1$ *obtenemos las ecuaciones*

$$\begin{aligned} 3 + 9\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) &= 0 \\ 9\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) - 24 &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = \frac{-1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor de la función $z(x,y)$ *en el punto* $(2,1)$ *es*

$$P_1(x,y) = 1 - \frac{x-2}{3} + \frac{8}{3}(y-1)$$

(5) Se considera la función $f(x,y,z) = 2x+y^2+z^2$ definida en el conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9, z = 0\}$

(a) Plantee las ecuaciones de Lagrange para f en el conjunto A. Obtenga los puntos que satisfacen las ecuaciones y el valor de los multiplicadores de Lagrange correspondientes. **1 punto**

Solución: *La función lagrangiana del problema es* $L(x,y,z;\lambda,\mu) = 2x + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \mu z$. *Las ecuaciones de Lagrange son:*

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} & = 2 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = 2y + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} & = 2z + 2\lambda z + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} & = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} & = z = 0 \end{cases}.$$

De la quinta ecuación tenemos que $z = 0$ *y de la tercera que* $\mu = 0$. *Luego el sistema queda*

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} & = 2 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = 2y + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} & = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}.$$

De la segunda ecuación tenemos $2y(1+\lambda) = 0$ *luego:*

- *o bien* $y = 0$ *que sustituyendo en la cuarta ecuación despejamos* $x^2 + 0 + 0 = 9$ *y obtenemos* $x = \pm 3$, *por lo tanto tenemos como soluciones* $(3,0,0;-\frac{1}{3},0)$ *y* $(-3,0,0;\frac{1}{3},0)$.
- *o bien* $\lambda = -1$ *que sustituyendo en la primera nos da* $x = 1$ *sustituyendo estos valores en la cuarta ecuación* $1 + y^2 + 0 = 9$ *obtenemos* $y = \pm\sqrt{8}$, *de donde obtenemos como soluciones* $(1,\sqrt{8},0;-1,0)$ *y* $(1,-\sqrt{8},0;-1,0)$.

(b) Sabiendo que el conjunto A es cerrado y acotado, estudie la existencia de extremos globales y si existen proporciona los puntos donde se alcanzan y su valor. **1 punto**

Solución: *Como* A *es un conjunto compacto por ser cerrado y acotado y* f *continua por ser un polinomio el teorema de Weierstrass garantiza que se alcanza el máximo y mínimo global. Se alcanzará en algún punto que cumple la condición necesaria de extremo local obtenido en el apartado anterior, evaluando la función en dichos puntos obtenemos* $f(3,0,0) = 6$, $f(-3,0,0) = -6$ $f(1,\sqrt{8},0) = 10$ *y* $f(1,-\sqrt{8},0) = 10$ *de donde obtenemos que* f *alcanza su valor mínimo en el segundo punto y el máximo en el tercer y cuarto puntos.*